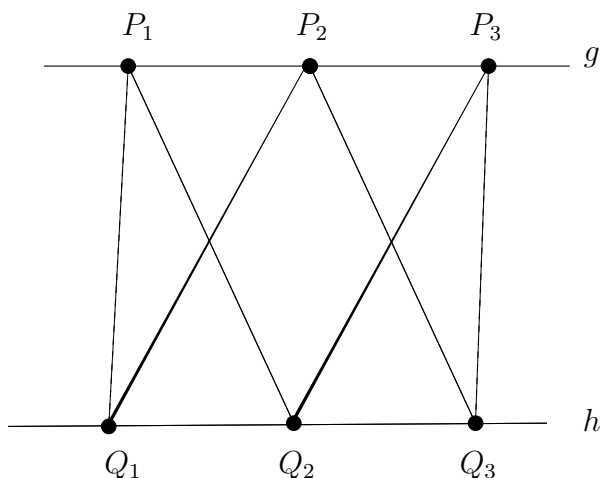


Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe 10 (Kleiner Satz von Pappos)

Zeigen Sie, dass in einer desarguesschen affinen Ebene der kleine affine Satz von Pappos gilt:

Sind g und h zwei parallele Geraden und P_i, Q_i paarweise verschiedene Punkte mit $P_i \in g, Q_i \in h$ (für $i = 1, 2, 3$) und $P_1Q_2 \parallel P_2Q_3$ sowie $Q_1P_2 \parallel Q_2P_3$, so gilt auch $P_1Q_1 \parallel P_3Q_3$.



Hinweis:

Eine desarguessche affine Ebene kann in einen geeigneten 3-dim affinen Raum eingebettet werden. Sie hat daher alle Eigenschaften einer Unterebene eines solchen Raumes.

Lösungsskizze:

In einer desarguesschen affinen Ebene (wie in einer Unterebene eines 3-dim Raumes) existieren alle möglichen Translationen, hier also

$$\tau_1 := \tau_{P_1P_2} \quad \text{und} \quad \tau_2 := \tau_{P_2P_3}.$$

Damit gilt $\tau_2 \circ \tau_1(P_1) = P_3$ sowie wegen der Kommutativität der Translationsgruppe und gemäß der Parallelogrammkonstruktion

$$\tau_2 \circ \tau_1(Q_1) = \tau_1 \circ \tau_2(Q_1) = \tau_1(Q_2) = Q_3.$$

Da Translationen Geraden auf parallele Geraden abbilden, folgt die Behauptung. \square

