Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe C6 (Eigenwerte, charakteristisches Polynom, Diagonalisierbarkeit, Minimalpolynom)

Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)} \ !$$

(i) Zeigen Sie, dass $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,1)}$ ein Eigenvektor von A_1 ist!

Welcher Eigenwert λ_1 gehört zu v_1 ?

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_1}(X)$, die Eigenwerte von A_1 und deren algebraische Vielfachheit, ferner

(iii) den Eigenraum $E(A_1, \lambda_1)$ von λ_1 zu A_1 und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von A_1 ! Was folgt für die Diagonalisierbarkeit von A_1?

(iv) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A_1 !

Lösungsskizze

(i) Wegen

$$A_1 v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist v_1 Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

(ii) Es gilt:

$$\chi_{A_1}(X) = \det(A_1 - XE_3) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & -1 \\ 0 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)[(1-X)(4-X)+2] = (2-X)(X^2-5X+6)$$
$$= (2-X)^2(3-X).$$

A_1 hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

(iii) Nach einem Satz kann die geometrische Vielfachheit von λ_2 nicht größer sein als die algebraische Vielfachheit von λ_2; sie ist daher 1.
Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit von λ_1 kann man entweder $3 - \text{Rang}\,(A_1 - \lambda_1 E_3)$ berechnen oder, wie hier gefordert, den

Eigenaum $E(A_1, \lambda_1)$ von λ_1 bestimmen.
Aus

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $\eta = 0 = \theta$ bei beliebigem $\xi \in \mathbb{R}$ und daher für den Eigenraum:

$$E(A_1, \lambda_1) = v_1\mathbb{R};$$

die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist also 1 und damit verschieden von der algebraischen Vielfachheit dieses Eigenwerts. Nach einem Satz ist damit A_1 nicht diagonalisierbar.

(iv) Das Minimalpolynom μ_{A_1} von A_1 annulliert definitionsgemäß die Matrix A_1 und hat bezüglich dieser Eigenschaft minimalen nicht-negativen Grad. Ferner teilt es das charakteristische Polynom χ_{A_1} und ist normiert.
Als Kandidaten für μ_{A_1} kommen daher nur in Frage:

- $\mu_1(X) = (X-2)(X-3)$, falls $\mu_1(A_1) = 0$ ist
- $\mu_2(X) = -\chi_{A_1}(X)$ andernfalls.

Nun gilt

$$\mu_1(A_1) = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 \\ 0 & 2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mu_{A_1} = -\chi_{A_1}.$$

Alternativ kann man auch den Satz zitieren, dass eine Matrix diagonalisierbar ist, wenn ihr Minimalpolynom nur einfache Nullstellen hat. Hier ist aber A_1 nicht diagonalisierbar; folglich gilt $\mu_{A_1} \neq \mu_1$.