Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe C5 (Eigenwerte, Eigenräume)
Berechnen Sie, falls sie existieren, die Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{(2,2)}$$

im Fall

(i) $K = \mathbb{R}$,

(ii) $K = \mathbb{C}$,

(iii) $K = \mathrm{GF}\,(3)$,

(iv) Bestimmen Sie, falls sie existieren, die Eigenräume von A !

Lösungsskizze

Es gilt in allen Fällen $\quad \chi_A(X) = \det(A - XE_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$

(i) Falls $K = \mathbb{R}$ ist, gibt es keine Nullstelle des Polynoms $X^2 + 1$ (da das Quadrat jeder reellen Zahl nicht-negativ ist). In diesem Fall hat also A keine Eigenwerte.

(ii) Über $\mathbb{C}$ zerfällt X^2+1 in Linearfaktoren: $\chi_A(X) = X^2+1 = (X+i)(X-i)$; es hat also $\chi_A(X)$ die Nullstellen (und damit A die Eigenwerte) $\lambda_1 = +i$ und $\lambda_2 = -i$ (wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet).

(iii) Durch Einsetzen von $0, 1, 2$ in $X^2 + 1$ und (eventuelle Reduktion modulo 3) sieht man, dass im Falle $K = \mathrm{GF}\,(3)$ das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ keine Nullstelle und damit A keine Eigenwerte besitzt.

(v) Da A in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathrm{GF}\,(3)$ keine Eigenwerte besitzt, gibt es auch keine Eigenräume. Sei also $K = \mathbb{C}$.

Die Eigenräume $E(A, i)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ und $E(A, -i)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$ von A haben wegen der Verschiedenheit von λ_1 und λ_2 die Dimension 1 und sind die Lösungsräume der beiden linearen homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die u.a. von $(1, -i)^T$ bzw. $(1, +i)^T$ gelöst werden. Es folgt

$$E(A, i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathbb{C} \quad \text{und} \quad E(A, -i) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathbb{C}.$$