Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe C4 (Determinante / Eigenwert)

(i) Erfülle $A_1 \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Bedingung $A_1^T \cdot A_1 = E_n$. (Eine solche Matrix heißt *orthogonale* Matrix.)
Bestimmen Sie $|\det A_1|$!

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \mathrm{id}$.
(a) Bestimmen Sie $|\det f|$ und $\det(f - \mathrm{id}) \cdot \det(f + \mathrm{id})$.
(b) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von f, so gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

Lösungsskizze

(i) Es gilt $1 = \det E_n = \det A_1^T A_1 = \det A_1^T \cdot \det A_1 = (\det A_1)^2$, woraus $|\det A_1| = 1$ folgt.

(ii) Zu (a): Sei $A = M_B^B(f)$ (nach Auswahl einer Basis B). Dann gilt:

$\det(f) = \det(A)$ und $\det(f - \mathrm{id}) = \det(A - E_2)$ sowie $\det(f + \mathrm{id}) = \det(A + E_2)$.

und damit
$f^2 = \mathrm{id} \Longrightarrow A^2 = E_2 \Longrightarrow \det(A) \cdot \det(A) = \det(A^2) = \det(E_2) = 1 \Longrightarrow$
$|\det A| = 1 \Longrightarrow |\det(f)| = 1$ und

$$\det(A - E_2) \cdot \det(A + E_2) = \det(A^2 - E_2) = \det(E_2 - E_2) = 0.$$

Zu (b): Sei $f(x) = \lambda \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$x = \mathrm{id}(x) = f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x.$$

Damit ergibt sich sofort (da $x \neq 0$): $\lambda^2 = 1$ bzw. $\lambda = \pm 1$.