

## Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”

**Aufgabe C3** (Eigenwert, Diagonalisierbarkeit, Geradenspiegelung)

Eine lineare Abbildung  $f$  der reellen euklidischen Ebene in sich habe bzgl. der kanonischen Basis die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

mit  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  eine Geradenspiegelung ist.

**Lösungsskizze**

Man zeigt: Es existiert eine Orthonormalbasis  $B$  mit  $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Dafür bestimmt man zunächst die Eigenwerte von  $A$ :

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -\cos \varphi - x & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - x \end{pmatrix} = x^2 - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = x^2 - 1.$$

Als Eigenwerte ergeben sich damit  $\lambda_{1/2} = \pm 1$ . Somit ist  $f$  diagonalisierbar mit einer Eigenbasis  $B$  bzgl. der  $f$  die oben angegebene Matrixdarstellung hat. Da die darstellende Matrix symmetrisch ist, sind nach Aufgabe C2 die Basisvektoren sogar orthogonal, was alles zeigt.