Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C2 (Eigenwert, symmetrische Matrix)

Zeigen Sie:
Ist A eine reelle symmetrische Matrix, so sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).

Lösungshinweis: Sind λ und μ Eigenwerte von A, und sind v bzw. w zugehörige Eigenvektoren, so betrachte man $\lambda(v \cdot w)$!

Lösungsskizze
Für A als symmetrische Matrix gilt $A = A^T$. Seien $\lambda \neq \mu$ zwei verschiedene Eigenwerte von A und $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{w} \neq \vec{0}$ Eigenvektoren zu λ bzw. μ, also mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ und $A\vec{w} = \mu\vec{w}$. Es gilt (mit dem kanonischen Skalarprodukt):

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \lambda\vec{v}^{\,T}\vec{w} = (\lambda\vec{v})^T\vec{w} = (A\vec{v})^T\vec{w} = \vec{v}^{\,T}A^T\vec{w} = \vec{v}^{\,T}A\vec{w} = \vec{v}^{\,T}(\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^{\,T}\vec{w} = \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}). \end{aligned}$$

Aus $\lambda \neq \mu$ folgt $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, also $\vec{v} \perp \vec{w}$. $\square$