Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B7 (Basiswechsel bei linearen Abbildungen, ähnliche Matrizen)
Sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem kanonischem Skalarprodukt und daraus abgeleiteten Längen und Winkeln. $B_0 = (e_1, e_2)$ sei die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$, ferner σ_1 die Spiegelung an der $y-$ Achse, also der Geraden mit der Gleichung $x = 0$, σ_2 die Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $y(x) = x$, δ_α die Drehung um den Ursprung um α Grad und $B_1 = (\sigma_1(e_1), \sigma_1(e_2))$.

1. Bestimmen Sie die Matrix der Koordinatentransformation von B_0 zu B_1, also $M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id})$!
2. Geben Sie (ohne Beweis) die Matrizen von σ_2 bzw. δ_α bzg. der Basis B_0 an, also $M_{B_0}^{B_0}(\sigma_2)$ und $M_{B_0}^{B_0}(\delta_\alpha)$!
3. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen von σ_2 bzw. δ_α bzg. der Basis B_1, also $M_{B_1}^{B_1}(\sigma_2)$ und $M_{B_1}^{B_1}(\delta_\alpha)$!
4. Begründen Sie, warum die beiden folgenden Matrizen ähnlich sind:
$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze

1. Die Spiegelung an der $y-$Achse bildet e_1 auf $-e_1$ und e_2 auf sich ab. Daher ist $B_1 = (-e_1, e_2)$. In den Spalten von $M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id})$ stehen die Koordinaten der Vektoren $\mathrm{id}(e_1)$ bzw. $\mathrm{id}(e_2)$ bezüglich der Basis B_1. Es folgt
$$M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Es gilt
$$M_{B_0}^{B_0}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{B_0}^{B_0}(\delta_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$
3. Ist f lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich, so gilt
$M_{B_1}^{B_1}(f) = M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id}) \cdot M_{B_0}^{B_0}(f) \cdot M_{B_0}^{B_1}(\mathrm{id}) = M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id}) \cdot M_{B_0}^{B_0}(f) \cdot M_{B_1}^{B_0}(\mathrm{id})^{-1}$.
Wegen $[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich speziell für $f = \sigma_2$:
$$M_{B_1}^{B_1}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Und speziell für $f = \delta_\alpha$ erhält man:
$$M_{B_1}^{B_1}(\delta_\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$
4. Nach 3. existiert eine reguläre Matrix S mit $A_1 = SA_2S^{-1}$. *Alternativ:* Die beiden Matrizen sind ähnlich, da sie (nach 3.) darstellende Matrizen des gleichen Homomorphismus (nur bzgl. unterschiedlicher Basen) sind.