Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B6 (Basistransformation)

Sei $B = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}-$ Vektorraums $V = \mathbb{R}^2$; sei ferner

$$\begin{aligned} \tilde{b_1} &:= e_1 + e_2 \\ \tilde{b_2} &:= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

1. Zeigen sie, dass $\tilde{B} := (\tilde{b_1}, \tilde{b_2})$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

2. Gegeben sei der Vektor $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ von x bzgl. der Basis $\tilde{B}$!

Lösungsskizze

1. Aus $\lambda(e_1 + e_2) + \mu(e_1 - e_2) = 0$ erhält man das LGS

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{cases}$$

   und daraus $\lambda = 0 = \mu$.

   Alternativ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$

2. Es ist

$$M_{\tilde{B}}^{B}(\mathrm{id}) = M_{B}^{\tilde{B}}(\mathrm{id})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

   (Karetesiche Koordinanten von $\tilde{b_i}$, also der Bilder von $\tilde{b_i}$ unter der Abbildung id , als Spalten der Matrix.!)

   Nun gilt

$$M_{\tilde{B}}(x) = M_{\tilde{B}}^{B}(\mathrm{id}) M_B(x) = [M_{B}^{\tilde{B}}(\mathrm{id})]^{-1} M_B(x).$$

   Man erhält damit

$$M_{\tilde{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}.$$