Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B5 (Direkte Summe, lineare Unabhängigkeit, Dimension)[1]
Der $K-$Vektorraum V sei die direkte Summe der Unterräume U und W; seien ferner $u_1, \ldots, u_k$ linear unabhängige Vektoren von U sowie $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängige Vektoren von W.

(i) Zeigen Sie, dass dann auch $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots w_m$ linear unabhängig sind.

(ii) Benutzen Sie (i) zum Nachweis von $\dim_K(U \oplus W) = \dim_K U + \dim_K W$.

Lösungsskizze

(i) Sei

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m = 0$$

mit $\lambda_i, \mu_j \in K$. Dann folgt aus

$$(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k) + (\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m) = 0 = 0 + 0$$

mittels der Eindeutigkeit der Darstellung eines Vektors aus V als Summe mit Summanden aus U und W:

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0 \in U \quad \text{und} \quad \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m = 0 \in W.$$

Die lineare Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_k$ und die von $w_1, \ldots, w_m$ zeigen, dass alle λ_i und alle μ_j gleich 0 seien müssen und damit

$$u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m$$

linear unabhängig.

(ii) Ist B_1 eine Basis von U und B_2 eine Basis von W, so is $B_1 \cup B_2$ Erzeugendensystem von V. Jede endliche Teilmenge von $B_1 \cup B_2$ ist nach (i) linear unabhängig; also ist $B_1 \cup B_2$ linear unabhängig, folglich $B_1 \cup B_2$ Basis von V und (wegen $U \cap W = \{0\}$)

$$\dim_K V = |B_1 \dot{\cup} B_2| = |B_1| + |B_2| = \dim_K U + \dim_K W.$$

[1] Angelehnt an Aufgabe 5.48 aus Seymour Lipschutz: Theory and Problems of Linear Algebra. Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill 1968, 1974