Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B4 (Direkte Summe, Dimension)[1]
Gegeben seien die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^{(4,1)}$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ist $U + W$ eine direkte Summe von U und W?

Lösungsskizze
Laut Definition ist $U + W$ genau dann eine direkte Summe, wenn

$$U \cap W = \{0\}$$

ist. Dies gilt genau dann, wenn $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0$. Da die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} W = 2 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 4.$$

Aus der Dimensionsformel für eine beliebige Summe von (endlich-dimensionalen) Unterräumen erhält man

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 2 + 2 - 4 = 0$$

und damit $U \cap W = \{0\}$.
Alternativ kann man aus der Darstellung eines Elementes aus $U \cap W$ als Linearkombination aus U und aus W schließen, dass die vier Koeffizienten 0 sein müssen.

[1] Angelehnt an Aufgabe 4.11 aus Dietlinde Lau: Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie. Aufgaben mit Lösungen. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2007