## Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

**Aufgabe B1** (Faktorraum, Basis)

Sei $U$ ein nicht-trivialer echter Unterraum mit Basis $B_U$ des $K-$Vektorraums $V$; sei ferner $B = B_U \dot{\cup} D$ eine Ergänzung von $B_U$ zu einer Basis $B$ von $V$ (und damit $D = B \setminus B_U$).
Zeigen Sie, dass dann $B_{V/U} := \{d+U \mid d \in (B \setminus B_U)\}$ eine Basis des Faktorraums $V/U$ ist.

**Lösungsskizze**

Wir zeigen, dass $B_{V/U}$ (i) linear unabhängig und (ii) ein Erzeugendenystem von $V/U$ ist. Natürlich sind die Elemente von $B_{V/U}$ Vektoren aus $V/U$.

(i) Gegeben sei eine Linearkombination des Nullvektors von $V/U$, also von $U$, mit Elementen aus $B_{V/U}$:

$U = \sum\limits_{i \in I} (d_i + U)\lambda_i$ (mit $d_i \in (B \setminus B_U)$ und $\lambda_i \in K$ sowie einer geeigneten Indexmenge $I$.)

Es folgt $U = \sum\limits_{i \in I} d_i \lambda_i + U$ und daraus $v = \sum\limits_{i \in I} d_i \lambda_i \in U$. Wären die $\lambda_i$ nicht alle 0, so hätte, da $B_U \cap D = \emptyset$ und $B_U$ Basis von $U$ ist, der Vektor $v$ zwei verschiedene Darstellungen mit Elementen aus $B$, ein Widerspruch. Also ist die gewählte Linearkombination trivial; und $B_{V/U}$ ist linear unabhängig.

(ii) Ist $w$ Element von $V/U$, so existiert ein $v \in V$ mit $w = v + U$. Da $B = B_U \cup D$ Basis von $V$ ist, existiert eine Darstellung $v = \sum\limits_{i \in I} c_i \lambda_i + \sum\limits_{j \in J} d_j \mu_j$ mit $c_i \in B_U$ und $d_j \in B \setminus B_U$.

Wir erhalten: $w = v + U = \sum\limits_{i \in I} c_i \lambda_i + \sum\limits_{j \in J} d_j \mu_j + U = \sum\limits_{j \in J} d_j \mu_j + U$ (wegen $c_i \in U$), also $w = \sum\limits_{j \in J} (d_j + U)\mu_j$. Daher ist $B_{V/U}$ Erzeugendensystem von $V/U$.

Insgesamt folgt, dass $B_{V/U}$ eine Basis von $V/U$ ist.