**Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik**
**'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'**

**Aufgabe A7** (Linearform, Kern einer linearen Abbildung)

Seien $V = \mathbb{R}^n$ und $H$ ein Unterraum der Dimension $n-1$ (Hyperebene durch 0) von $V$; seien ferner $f \in V^*$ (also Linearform) mit $H = \text{Kern } f$, außerdem $a \in H \setminus \{0\}$ und

$$t : V \to V \quad \text{definiert durch} \quad t(v) = v - a\,f(v).$$

(a) Begründen Sie: Es existiert (wie vorausgesetzt) eine Linearform $f$ von $V$ mit $H = \text{Kern } f$.

(b) Zeigen Sie: $t$ ist linear

(c) Bestimmen Sie Kern $t$ !

(d) $t$ ist injektiv und surjektiv. Begründen Sie dies!

(e) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von $t$ !

*Anmerkung:* Es zeigt sich, dass es sich bei den Abbildungen $t$ um eine Verallgemeinerung der uns aus der euklidischen Ebene bekannten Scherungen auf beliebige endliche Dimensionen handelt.

*Lösungsskizze*

(a) Ergänzt man eine Basis $C = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ von $H$ zu einer Basis $B = C \cup \{b\}$ von $V$, so hat z.B. die lineare Abbildung $f : V \to K$ mit $f(c_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $f(b) = 1$, die nach dem Fortsetzungssatz existiert, die geforderten Eigenschaften.

(b) Wegen der Linearität von $f$ gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$t(v_1\lambda + v_2) = v_1\lambda + v_2 + af(v_1\lambda + v_2) = v_1\lambda + v_2 + a[f(v_1)\lambda + f(v_2)] =$$
$$[v_1 + af(v_1)]\lambda + [v_2 + af(v_2)] = t(v_1)\lambda + t(v_2).$$

Also ist $t$ linear.

(c) $v \in \text{Kern } t \Rightarrow t(v) = v - af(v) = 0 \Rightarrow v = af(v)$. Da $a \in H$ gilt und $H$ Unterraum ist, folgt

$$v \in \text{Kern } t \Rightarrow v \in H = \text{Kern } f \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v = af(v) = 0.$$

Also gilt Kern $t = \{0\}$.

(d) Da der Kern von $t$ nur den Nullvektor enthält, ist die lineare Abbildung $t$ injektiv. Da $V$ endlich-dimensional ist, folgt aus der Injektivität des Endomorphismus $t$ auch die Surjektivität von $t$.

(e) Aus $t(v) = v$, also $v = t(v) = v - af(v)$, folgt $af(v) = 0$, wegen $a \neq 0$ daher $f(v) = 0$, also $v \in H$. Ist umgekehrt $v \in H$, so $t(v) = v - af(v) = v$. Daher ist die Menge der Fixpunkte von $t$ gleich $H$. □

*Anmerkung:* Man kann auch zeigen, dass jede zu $H$ parallele Hyperebene unter $t$ fix bleibt.