Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe A5 (Determinante, lineare Abbildung)

Untersuchen Sie, ob die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung f_A von K^3 nach K^3 bijektiv ist

(a) für $K = \mathbb{R}$,

(b) für $K = \mathbb{F}_3 = \mathrm{GF}(3) = \mathbb{Z}_3$.

Lösungsskizze

Die durch A bestimmte lineare Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn A vollen Rang hat, d.h. wenn $\det A \neq 0$ ist.
Z.B. mit der Formel von Sarrus berechnet man:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right. = 1 + 0 + 0 - 4 - 0 - 0 = -3;$$

also gilt:

(a) Für $K = \mathbb{R}$ ist $\det A = -3 \neq 0$ und damit f_A bijektiv.

(b) Für $K = \mathbb{F}_3$ ist $\det A = 0$ und damit f_A nicht bijektiv.