

**Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs  
“Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”**

**Aufgabe A2** (Determinante, elementare Umformungen)  
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{pmatrix}.$$

**Lösungsskizze**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda - r & r - \lambda & 0 & 0 \\ \lambda - r & 0 & r - \lambda & 0 \\ \lambda - r & 0 & 0 & r - \lambda \end{vmatrix} && \text{(Subtraktion der ersten} \\ && \text{Zeile von allen anderen)} \\ &= \begin{vmatrix} r + 3\lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & r - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r - \lambda \end{vmatrix} && \text{(Addition aller Spalten zur ersten)} \\ &= [r + 3\lambda](r - \lambda)^3. \end{aligned}$$