Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D6 (Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt)
Gegeben seien folgende drei Vektoren im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit kanonischem Skalarprodukt:

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,1,0) \quad \text{und} \quad v_3 = (1,0,0).$$

Bestimmen Sie mittels des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis (u_1, u_2, u_3) mit $< v_1 >=< u_1 >$ und $< v_1, v_2 >=< u_1, u_2 >$!

Lösungsskizze[1]
Vorbemerkung: v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig. (Die Matrix mit Zeilen v_1, v_2, v_3 ist eine Dreiecksmatrix.) Daher kann man das Verfahren von Gram-Schmidt anwenden.
Zuerst normalisieren wir v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Es ist $< u_1 >=< v_1 >$ und $||u_1|| = 1$.
Dann definieren wir

$$w_2 := v_2 - (v_2 u_1^T) u_1 = (1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

und normalisieren w_2 (mittels $||w_2|| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}}$) zu

$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Laut Konstruktion gilt auch $< v_1, v_2 >=< u_1, u_2 >$.
Schließlich setzen wir

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - (v_3 u_1^T) u_1 - (v_3 u_2^T) u_2 = (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \\ &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \end{aligned}$$

und normieren (mittels $||w_3|| = \sqrt{\frac{2}{4}}$) zu

$$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0).$$

Die gesuchte Orthonormalbasis ist daher

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\Big).$$

[1] Frei nach S.Lipschutz, Schaum's Outline Series, McGra-Hill, Example 13.12