

Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra II”

Aufgabe D3 (Isometrie)

Sei ψ das kanonische Skalarprodukt auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{(n,1)}$ und M eine reelle $n \times n$ -Matrix. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die lineare Abbildung

$$m : \mathbb{R}^{(n,1)} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,1)} \quad \text{mit} \quad m(v) = M \cdot v$$

das Skalarprodukt ψ erhält, dass also $\psi(m(u), m(v)) = \psi(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$ gilt.

Lösungsskizze

Bezüglich der kanonischen Basis (e_1, \dots, e_n) ist M die Matrix von m , und jeder Vektor u hat u als Koordinatenvektor. Die Fundamentalmatrix des kanonischen Skalarprodukts ψ bezüglich der kanonischen Basis, also

$$(\psi(e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n},$$

ist gleich E_n . Es gilt also $\psi(u, v) = u^T v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$.

Man erhält damit

$$(*) \quad \psi(u, v) = \psi(m(u), m(v)) \iff u^T v = (Mu)^T (Mv) = u^T M^T M v$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$. Einsetzen von (e_i, e_j) für (u, v) liefert den Eintrag von Stelle (i, j) , nämlich $e_i^T e_j = e_i^T M^T M e_j$; dies zeigt die Notwendigkeit von $M^T M = E_n$. (M heißt dann “orthogonale” Matrix.)

Diese Bedingung ist wegen $(*)$ auch hinreichend.