

Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra II'

Aufgabe D2 (Orthogonalraum)

Sei W der Unterraum von \mathbb{R}^4 , der von $u = (1, 0, -1, 2)$ und $v = (2, 0, 2, -1)$ aufgespannt wird; sei ferner W^\perp der Orthogonalraum (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts) von W in \mathbb{R}^4 durch den Nullpunkt .

- (a) Welche Dimension hat W^\perp ?
- (b) Geben Sie eine Basis B von W^\perp an!

Lösungsskizze

- (a) Da $W = \langle u, v \rangle$ und u, v linear unabhängig sind, folgt $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$; nach der Dimensionsformel für orthogonale Unterräume (hergeleitet aus der für lineare Gleichungssysteme) gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} W = 4 - 2 = 2.$$

- (b) Wir suchen Vektoren $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ aus W^\perp :

$$\begin{aligned} x \in W^\perp &\iff u \cdot x = 0 = v \cdot x \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x^T = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = 0 \iff \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0 \\ 4\xi_3 - 5\xi_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten z.B. $w_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $w_2 = (-3, 0, 5, 4) \in W^\perp$ (Probe¹), sodass (w_1, w_2) eine Basis von W^\perp ist.

¹Sind nicht, wie hier, alle Umformungen Äquivalenzumformungen, so ist (wegen der Beweisrichtung) die Probe unerlässlich.