

Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra II”

Aufgabe D1 (Sesquilinearform, orthogonal, linear unabhängig)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit J -Sesquilinearform Φ . Zeigen Sie, dass in V eine orthonormale Teilmenge $U = \{u_1, \dots, u_r\}$, also $U \subseteq V$ mit $\Phi(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, r\}$, linear unabhängig ist.

Lösungsskizze

Wegen $\Phi(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ und der Linearität von Φ in der 1. Komponente gilt:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i = 0 \implies 0 = \Phi(0, u_j) = \Phi\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i, u_j\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Phi(u_i, u_j) = \alpha_j$$

(für alle $j = 1, \dots, r$).

Daher ist U linear unabhängig.