Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe E4 (Punktspiegelung, Translation)

Sei E eine desarguessche euklidische Ebene. In E sei φ Produkt zweier verschiedener Punktspiegelungen π_P und π_Q. Zeigen Sie, dass φ eine Translation entlang der Geraden PQ ist.
Hinweis: Sonstige Eigenschaften von Spiegelungen bzw. von Dehnungen dürfen unbewiesen benutzt werden.

Lösungsskizze:

Da $\pi_P \neq \pi_Q$, ist $\varphi = \pi_P \circ \pi_Q$ nicht die Identität; es ist also zu zeigen, dass φ fixpunktfreie Dehnung ist.
φ ist Dehnung, da π_P, π_Q Dehnungen sind (zentrische Streckungen mit Faktor -1) und die Dehnungen eine Gruppe bilden.
φ besitzt keinen Fixpunkt: Da $P \neq Q$, ist weder P noch Q Fixpunkt, weil nur jeweils P (bzw. Q) unter π_P (bzw. π_Q) fix bleibt. Gäbe es aber ein $F \neq P, Q$ mit $\pi_P \circ \pi_Q(F) = F$ würde $\pi_Q(F) = \pi_P(F)$ folgen (denn Punkstpiegelungen sind involutorisch). Da Punkstpiegelungen aber (als Streckungen) durch ein Paar von Bild und Urbild und dem Mittelpunkt als Zentrum eindeutig bestimmt sind, würde $\pi_P = \pi_Q$ im Widerspruch zur Annahme folgen.
Wegen

$$\varphi(Q) = \pi_P(\pi_Q(Q)) = \pi_P(Q) \in PQ$$

ist φ Translation entlang PQ.