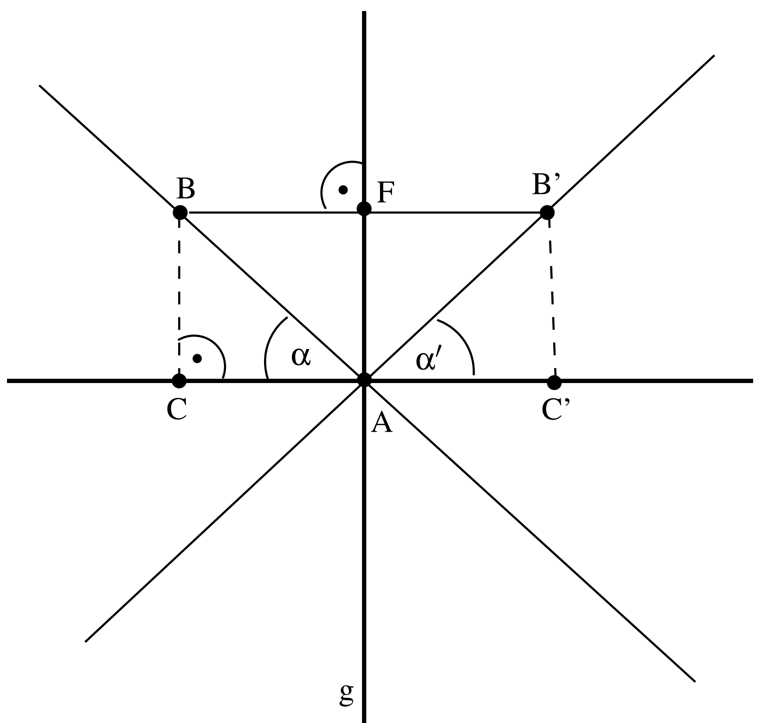
Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe C11 (Geradenspiegelung) (Abwandlung von Skript-Aufgabe 67)

Sei E eine euklidische Ebene und g Gerade in E. Zu g definieren wir eine Geradenspiegelung γ_g wie folgt: Für $P \in E$ ist $\gamma_g(P)$ der eindeutig bestimmt Punkt P' mit $(P,F,P') \in \mathcal{Z}$ und $|\overline{PF}| = |\overline{P'F}|$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g ist.
Mit den Bezeichnungen der folgenden Figur zeige man, ohne die Winkelgrößentreue und allgemeine Längentreue unbewiesen zu verwenden:

$$|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'AB'|.$$



Lösungsskizze
Nach Definition gilt $|\overline{BF}| = |\overline{B'F}|$ und $|\sphericalangle AFB| = R = |\sphericalangle AFB'|$. Mit dem Kongruenzsatz SWS (oder dem Satz des Pythagoras) erhält man $\Delta AFB \equiv \Delta AFB'$ und damit $|\overline{BA}| = |\overline{B'A}|$. Ebenfalls nach Definition gilt

$$|\overline{CA}| = |\overline{C'A}| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle ACB| = R = |\sphericalangle AC'B'|.$$

Da die Hypotenusen der beiden rechtwinkligen Dreiecke ΔABC und $\Delta AB'C'$ länger sind als die jeweiligen Katheten, lässt sich mit dem Kongruenzsatz SsW die Kongruenz dieser Dreiecke beweisen, aus der die Behauptungen folgen.