Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A2 (Affine Ebene, Geradenschnitte, Zentralprojektion)
Seien $\mathcal{A}$ eine affine Ebene und g und h zwei verschiedene Geraden von $\mathcal{A}$, ferner Z ein Punkt von $\mathcal{A}$ mit $Z \notin g \cup h$.
Betrachten Sie die Zuordnung $\varphi : Q \mapsto QZ \cap h$ für $Q \in g$. Definiert φ eine Bijektion von g auf h ? Begründen Sie Ihre Antwort! (Fallunterscheidung: $g \parallel h$ und $g \nparallel h$!)
Lösungshinweis: Eine entscheidende Frage ist, ob sich die betrachteten Geraden jeweils schneiden.
Lösungsskizze:
Ist Q Punkt von g, dann schneidet die (eindeutig bestimmte) Gerade ZQ die Gerade h (nach der Definition der Parallelität von Geraden einer Ebene) genau dann in einem Punkt, dem Bildpunkt von Q, wenn $ZQ \nparallel h$ gilt. Analog besitzt ein Punkt R von h ein Urbild genau dann, wenn $ZR \nparallel g$ ist.

1.Fall: Ist $g \parallel h$, so schneidet wegen ($Z \notin g \cup h$) die nach dem Euklidischen Parallelenaxiom eindeutig bestimmte Parallele zu g und h durch Z weder g noch h. Daher besitzt jeder Punkt von g einen eindeutigen Bildpunkt und jeder Punkt von h einen eindeutigen Urbildpunkt, und φ ist bijektiv.

2.Fall: Ist $g \nparallel h$, so schneidet die nach dem Euklidischen Parallelenaxiom eindeutig bestimmte Parallele zu h durch Z zwar die Gerade g in einem Punkt Q, aber nicht h. Daher hat Q keinen Bildpunkt unter φ, und φ ist keine Bijektion von g auf h. $\square$