Modulprüfung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie' am 28.6.17

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben!
Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Affiner Raum)

Seien $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein drei-dimensionaler affiner Raum, $g \in \mathcal{G}$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $P \notin g$.

(i) Begründen Sie elementargeometrisch (unter Angabe der verwendeten Axiome):
P und g spannen genau eine Ebene $E \in \mathcal{E}$ auf, also eine Ebene $E \in \mathcal{E}$ mit $P \in E$ und $g \subseteq E$.

(ii) Bezeichne $[P]_E$ die Menge $\{h \in \mathcal{G} \mid P \in h \subseteq E\}$ der Geraden durch P, die in der Ebene E (aus (i)) liegen. Zeigen Sie :

$$|\,[P]_E| = |g| + 1.$$

(iii) Begründen Sie: Je zwei Geraden g und h aus E haben die gleiche Mächtigkeit! Dabei dürfen Sie hier ohne Beweis die Existenz eines Punktes $P \in E$ mit $P \notin g \cup h$ voraussetzen. (Das gilt übrigens bis auf eine Ausnahme immer.)

Lösungshinweis: Sie dürfen die Inzidenzaxiome und das Euklidische Parallelenaxiom benutzen.

Aufgabe 2 (Dreiecks-Kongruenz)

Beweisen Sie (in der euklidischen Ebene) den Kongrunzsatz 'WSW', also:
Sind ΔABC und $\Delta A'B'C'$ Dreiecke der euklidischen Ebene mit

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C' \quad \text{und} \ \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C',$$

so gilt $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Vermerken Sie dabei, welche Kongruenzaxiome bzw. welche Sätze Sie jeweils benutzen!
Lösungshinweise:
• Sie dürfen die Kongruenzaxiome benutzen und ohne Beweis den Kongruenzssatz 'SWS' und die Existenz und Eindeudigkeit des Schnittpunkts zweier nicht-paralleler Geraden der Ebene.
• Wählen Sie $D' \in B'C'^{+}$ mit $\overline{B'D'} \equiv \overline{BC}$!

Aufgabe 3 (Kongruenz von Winkeln)

Zeigen Sie, dass in der euklidischen Ebene gilt:

(i) Freie Schenkel von kongruenten Stufenwinkeln sind parallel.
Lösungshinweis: Widerspruchsbeweis! Dabei dürfen Sie hier unbewiesen benutzen, dass in einem Dreieck kein Außenwinkel kongruent zu einem nicht-anliegenden Innenwinkel ist.

(ii) Stufenwinkel paralleler Geraden sind kongruent.
Lösungshinweis: Euklidisches Parallelenaxiom

(iii) Die Größen jeden Außenswinkels eines beliebigen Dreiecks ist gleich der Summe der Größen der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel.
Lösungshinweise: • Ziehen Sie eine geeignete Hilfs-Parallele!
• Eigenschaften von Stufen- und Wechselwinkel dürfen Sie bei (iii) unbewiesen benutzen.

Aufgabe 4 (Freie Beweglichkeit, Mittelpunkt, Winkel)

Beweisen Sie <u>mithilfe von Bewegungen</u> die Existenz der Winkelhalbierenden eines Winkels $\sphericalangle(p, q)$ der reellen euklidischen Ebene.
Lösungshinweise:
• Sei $\sphericalangle(p, q)$ mit Scheitelpunkt O gegeben. Wählen Sie A auf p und tragen Sie B auf q so ab, dass $|\overline{OB}| = |\overline{OA}|$ gilt. Existiert B ?
• Betrachten Sie die Fahnen (OA^{+}, OAB^{+}) und (OB^{+}, OBA^{+})!
• Benutzt werden darf (ohne Beweis) die „freie Beweglichkeit“, die Möglichkeit des Streckenab- bzw. des Winkelantragens, die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunkts einer Strecke, Eigenschaften von Bewegungen, insbesondere Spiegelungen.

Lösungsskizzen:
Zu Aufgabe 1

(i) Die Gerade g enthält (nach einem der Inzidenz- Axiome) (mindestens) zwei Punkte, Q und R mit $Q \neq R$. Die drei Punkte P, Q und R sind dann nicht kollinear und spannen daher (nach einem weiteren Axiom) genau eine Eben E auf, in der wegen $|E \cap g| \geq 2$ (erneut nach einem Axiom) g ganz enthalten ist .

(ii) Zu jedem Punkt R von g gibt es genau eine Gerade h mit P, R in h. Umgekehrt: Nach dem Parallelenaxiom geht in E durch P genau eine Parallele zu g; diese ist die einzige Gerade, die g nicht schneidet. Damit ist $|g|$ gleich der die Mächtigkeit der Menge aller g schneidenden Geraden durch P und $[P_E]$ um eine Gerade (die Parallele) größer.

(iii) Sind g und h zwei Geraden von E mit $P \notin g \cup h$, so erhält man mit (ii)

$$|h| = |[P_E]| - 1 = |g|;$$

(diese Rechnung ist klar, falls $|g|$ und $|h|$ endlich sind; ansonsten ist $|g| = |g| + 1 = |h| + 1 = |h|$).

Alternativ: Sind g' und h' die Parallelen zu g bzw. h durch P, so gibt es eine Bijektion zwischen den Schnittpunkten der Geraden von $[P]_E \setminus \{g', h'\}$ mit g bzw.h. (einer Zentralprojektion entsprechend). Diese Bijektion lässt sich auf g und h ausdehnen (z.B. durch $g \cap h' \leftrightarrow g' \cap h$ im Falle $g \nparallel h$).

2.Alternative: Anwendung einer Parallelprojektion von g auf h längs einer zu g und h nicht parallelen Richtung.

Zu Aufgabe 2
Sei D' der Punkt mit $D' \in B'C'^{+}$ mit $\overline{B'D'} \equiv \overline{BC}$. Der Punkt D' existiert nach dem Axiom des Streckenabtragens (und ist eindeutig bestimmt, da nach einem Hilfssatz das Streckenabtragen eindeutig ist). Es gilt dann $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A'B'D'$ und $\overline{BC} \equiv \overline{B'D'}$; aus dem Kongruenzsatz 'SWS' folgt

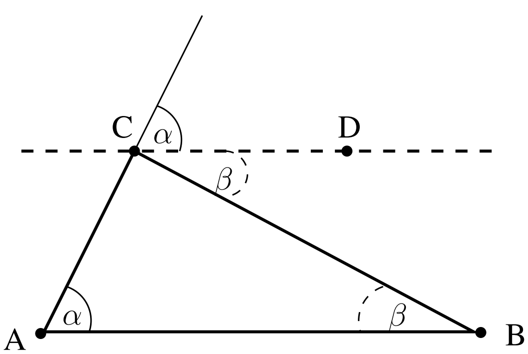
$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'D'$$

und (aus der Definition der Dreieckskongruenz) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'D'$. Laut Voraussetzung ist aber auch $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Aus der Transitivität der

Kongruenzrelation (lt. Axiom ist die Konguenz von Winkeln eine Äquivalenzrelation) ergibt sich $\sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B'A'D'$. Die Eindeutigkeit des Winkelantragens (lt. Axiom) an die Halbgerade $A'B'^{+}$ impliziert $A'C' = A'D'$ und damit (Eindeutigkeit des Schnittpunkts zweier nicht-paralleler Geraden) $C' = B'C' \cap A'C' = D'$. Folglich: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ $(= \Delta A'B'D')$. $\square$
Alternativ kann man auch ein Parallelogramm aus de
Zu Aufgabe 3

(i) Würden sich die freien Schenkel der kongruneten Stufenwinkel schneiden, so erhielte man ein Dreieck mit einem Innenwinkel, der kongruent zu einem nicht-anliegendem Außenwinkel wäre. ein Widerspruch.

(ii) Trägt man einen Winkel der Größe von $\sphericalangle BAC$ (s. Figur 1) an die Halbgerade CA^{-} an, so erhält man nach Teil (i) eine Parallele zu AB. Wegen der Eindeutigkeit der Parallele laut Euklidischem Parallelenaxiom liegt der entsprechende freie Schenkel des gegebenen 2. Stufenwinkels auf dieser Parallele.



Figur 1

(iii) Gegeben sei das Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln der Größe α bei A und β bei B ! Sei ferner D ein Punkt der Halbebene ACB^{+} und CD eine zu AB parallele Gerade (s. Figur 1).
Nach dem Satz über Stufenwinkel und über Wechselwinkel an parallelen Geraden hat $\sphericalangle(CD^{+}, CA^{-})$ ebenfalls die Größe α und $\sphericalangle BCD$ die Größe β. Da D im Inneren des Winkelfeldes von $\sphericalangle(CB^{+}, CA^{-})$ liegt, addieren sich die Winkel $\sphericalangle(CD^{+}, CA^{-})$ und $\sphericalangle(CD^{+}, CB^{+})$ zum Außenwinkel $\sphericalangle(CB^{+}, CA^{-})$ der Größe $\alpha + \beta$, was zu zeigen war.

Alternativ kann man aus dem Dreieck durch Ziehen von Parallelen ein Parallelogramm konstrieren ud dort die Innenwinkel betrachten.

Zu Aufgabe 4

Sei $\sphericalangle(p, q)$ mit Scheitelpunkt O gegeben. Wähle A auf p und trage B auf q so an, dass $|\overline{OB}| = |\overline{OA}|$; ($B$ existiert durch Streckenabtragen laut einem Kongruenzaxiom). Verbinde B und A, und wähle M als den Mittelpunkt dieser Strecke. Nach dem Satz über die freie Beweglichkeit existiert eine Bewegung φ, die die Fahne (OA^+, OAB^+) auf die Fahne (OB^+, OBA^+) abbildet. Dementsprechend gilt $\varphi(p) = q$ und $\varphi(O) = O$ (da O Endpunkt von OA^+ und OB^+ ist). Wegen der Längentreue einer Bewegung gilt zudem $\varphi(A) = B$. Wegen der Winkeltreue und der Eindeutigkeit des Winkelantragens aber auch $\varphi(q) = p$ und damit auch $\varphi(B) = A$, insgesamt also $\varphi(\overline{AB}) = \overline{AB}$. Wegen der Eindeutigkeit des Mittelpunkts einer Strecke erhält man schließlich $\varphi(M) = M$. Also liegen auf der Geraden OM mindestens zwei Fixpunkte von φ, nämlich O und M. Es ist φ daher (laut Definition) Geradenspiegelung mit Achse OM. Wie oben schon gesehen, wird wegen $\varphi(p) = q$ und $\varphi(q) = p$ der Winkel $\sphericalangle(p, q)$ auf sich abgebildet; wegen der gerade gefolgerten Eigenschaft von φ gilt auch, dass $\sphericalangle MOA$ auf $\sphericalangle MOB$ abgebildet wird, diese Winkel also gleich groß sein müssen. Dies zeigt, dass OM Winkelhalbierende von $\sphericalangle(p, q)$ ist. $\square$

Alternativ kann man auch die Spiegeluig an der Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ betrachten.