TEST-Aufgabe am 11.5.2016 (zur Klausurvorbereitung)

Aufgbe 1 (Eigenwerte, Eigenräume, charakteristisches Polynom)

(a) Seien K Körper und $A \in K^{(n,n)}$. Was versteht man unter einem Eigenwert λ von A? Beweisen Sie mittels der Definition und Aussagen über lineare Gleichungssysteme und Determinanten, dass λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A von A ist!

(b) Sei $A_1 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $t \in \mathbb{R}$! Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_{A_1} von A_1 und, soweit existent, die Eigenwerte von A_1. Welche Eigenräume besitzt A_1 ? Welche geometrische Vielfachheit (d.h. Dimension des zugehörigen Eigenraums) haben die Eigenwerte?

Lösungsskizzen
Zu Aufgabe 1

(a) $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A g.d.w. ein $v \in K^{(n,1)} \setminus \{0\}$ exisitert mit

$$(*) \quad Av = \lambda v.$$

Die Gleichung $(*)$ lässt sich äquivalent umformen zu

$$(**) \quad (A - \lambda E_n)v = 0.$$

Das homogene LGS $(**)$ hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix $(A - \lambda E_n)$ singulär ist und damit deren Determinante 0 .
Die Eigenwerte von A sind damit genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(X) = \det(A - XE_n).$$

Also gilt $\chi_A(\lambda) = 0$.

(b) Nach Teil (a) ist

$$\chi_{A_1}(X) = \begin{vmatrix} t - X & 0 \\ 1 & t - X \end{vmatrix} = (t - X)^2$$

mit einziger Nullstelle t. Es ist damit t einziger Eigenwert von A_1.
Der Eigenraum zu t ist der Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} t - t & 0 \\ 1 & t - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$, Die geometrische Vielfachheit von t ist folglich 1.