Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note

Nachklausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 5 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' SoSe 2016 (20.7.2016)

Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben! Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einweindfreie) Darstellung des zielführenden Gedankenganges.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte, also maximal 30 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Matrixdarstelllung, inverse Matrix, Determinante)

(a) Sei $B = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$, und sei $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} b_1 &=& e_1 \\ b_2 &=& e_1 + e_2 \\ b_3 &=& e_3 \end{array} \quad .$$

  (i) Bestimmen Sie die Matrix $M := M_B^{\tilde{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ der Identität (als lineare Abbildung!)

  (ii) Geben Sie den Wert der Determinante von M an, und folgern Sie aus dem Ergebnis (mittels eines Satzes aus der Vorlesung), dass $\tilde{B}$ ebenfalls Basis von $\mathbb{R}^3$ ist!

  (iii) Berechnen Sie M^{-1}, die inverse Matrix von M !

(b) Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix mit $A^2 = E_n$. Bestimmen Sie $\det(A)$
Lösungshinweis: zwei mögliche Werte!

Aufgabe 2 (Matrixdarstellung, Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalähnlichkeit)

(a) Gegeben sei folgender Endomorphismus:

$$f : \mathbb{R}^{(3,1)} \to \mathbb{R}^{(3,1)} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+2y \\ x+z \end{pmatrix}.$$

  1. Bestimmen Sie die Matrix A von f bezgl. der kanonischen Basis!
  2. Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_f von f!
  Kontrollergebnis: $\chi_A(X) = (1 - X)^2 \cdot (2 - X)$

3. Welche Eigenwerte besitzt f ?
4. Bestimmen Sie die Eigenräume von f !
5. Ist f diagonalisierbar bzw. A diagonalähnlich? (Begründung bitte mittels eines Satzes aus der Vorlesung)

(b) Zeigen Sie, dass für $C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt:
Die Matrix C und ihre Transponierte C^T haben das gleiche charakteristische Polynom!
Lösungshinweis: Vergleichen Sie $\det(C - XE_n)$ und $\det(C^T - XE_n)$!
Eigenschaften des Transponierens und der Determinante dürfen Sie unbewiesen benutzen.

Aufgabe 3 (Eigenwerte, Eigenräume, Eigenbasis)
Sei $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, also eine reelle $2 \times 2-$Matrix ! A habe die Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. Begründen Sie (u.a. durch Zitate von Sätzen aus der Vorlesung):
Sind v_1 bzw. v_2 Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2, so ist $B = (v_1, v_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$.
2. Geben Sie (mit kurzer Begründung) eine zu A ähnliche Diagonalmatrix an!
3. Welchen Wert hat $\det(A)$? (Hier ist nach keiner konkreten Zahl gefragt, sondern nach einer Funktion von λ_1 und λ_2; Antwort bitte mit kurzer Begründung!)
4. Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an! (Antwort bitte mit kurzer Begründung) !
5. Sei nun $f_A : \mathbb{R}^{(2,1)} \to \mathbb{R}^{(2,1)}$ mit $x \mapsto Ax$; für die Eigenwerte von A gelte ferner $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq \lambda_1$! Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f_A)$, $\mathrm{Bild}(f_A)$, die Eigenräume von f_A und den Zusammenhang zwischen diesen vier Unterräumen!

Aufgabe 4 (Skalarprodukt, orthonormale Vektorfamilie, Isometrie)

a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt Φ, und sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine orthonormale Familie von Vektoren aus V!
Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.

   (ii) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \Phi(v, v_i) \cdot v_i$.

   Lösungshinweis zu: (i)$\Rightarrow$(ii)
   Betrachten Sie für $v = \sum\limits_{j=1}^{r} v_j \lambda_j$ die Skalarprodukte $\Phi(v, v_i)$ für $i = 1, \ldots, r$.

(b) Sei A eine reelle $n \times n-$Matrix mit $A = -A^T$, und sei n ungerade. Kann dann A Matrix einer Isometrie sein? *Hinweis:* Zeigen Sie $\det(A) = 0$ durch Berechnen von $\det(A)$ auf zwei Arten!

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

(a) (i) Es gilt (formal)

$$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$M = M_B^{\tilde{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ erhält man die Spalten der gesuchten Matrix M mittels

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}_3}(b_1) = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{sowie} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$$

(ii) Die Detertminante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente der Matrix. Also gilt hier:

$$\det(M) = 1.$$

Die Matrix M ist daher regulär; das durch sie in der obigen Weise aus einer Basis erhaltenen Tupel $\tilde{B}$ daher (nach einem Satz aus der Vorlesung) ebenfalls Basis.

(iii) Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (z_1' = z_1 - z_2)$$

Mit den rechten Seiten der Matrix erhält man:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Mithilfe des Multiplikationssatzes für Determinanten ergibt sich:

$$E_n = A^2 \Longrightarrow 1 = \det(E_n) = \det(A^2) = (\det A)^2 \Longrightarrow \det(A) \in \{+1, -1\}.$$

zu Aufgabe 2

(a) 1. Die Vektoren der Standardbasis B haben folgende Bilder:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Daher hat die Matrix von $A := M_B^B(f)$ folgende Gestalt:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

2. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\chi_f(X) &= \chi_A(X)=\det(A-XE_3)\\ &= (1-X)\cdot\begin{vmatrix}2-X&0\\0&1-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)^2\cdot(2-X).\end{aligned}$$

3. Eigenwerte von f sind die Nullstellen von χ_A, also $\lambda_1=\lambda_2=1$ und $\lambda_3=2$. *Alternative Argumentation:* Bei einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente genau die Eigenwerte!

4. Bis auf Vielfache ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der einzige Eigenvektor zum Eigenwert 1;

denn aus

$$\begin{pmatrix}1-1&0&0\\1&2-1&0\\1&0&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=0$$

erhält man $\xi=0=\eta$.

Es folgt für den Eigenraum zu $\lambda_{1/2}$: $\quad\mathrm{Eig}(f,1)=\mathrm{Eig}(A,1)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathbb{R}.$

Den Eigenraum zu $\lambda_3=2$ erhält man als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}1-2&0&0\\1&2-2&0\\1&0&1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=0,$$

d.h. von

$$\left\{\begin{array}{rrcl}-\xi&&=&0\\\xi&&=&0\\\xi&-\zeta&=&0.\end{array}\right.$$

Es folgt für den Eigenraum: $\mathrm{Eig}(f,2)=\mathrm{Eig}(A,2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\mathbb{R}.$

5. Nach den Teilen 3 und 4 dieser Aufgabe hat der Eigenwert 1 von f die algebraische Vielfachheit 2, aber die davon abweichende geometrische Vielfachheit 1; deshalb ist (nach einem Satz der Vorlesung) die Matrix A nicht diagonalähnlich, der Endomorphismus f nicht diagonalisierbar.

(b) Wegen $\det(M) = \det(M^T)$ folgt
$\chi_C(X) = \det(C - XE_n) = \det((C - XE_n)^T) = \det(C^T - XE_n) = \chi_{C^T}(X)$.

zu Aufgabe 3

1. Nach Satz 29.5 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer quadratischen Matrix A linear unabhängig. Wegen $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$ ist daher die linear unabhängige zwei-elementige Menge $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

2. Bezüglich der Basis $B = (v_1, v_2)$ hat die Abbildung f_A die darstellende (Diagonal-) Matrix
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$
die (nach einem Satz der Vorlesung) ähnlich zur darstellenden Matrix A von f_A bzgl. der kanonischen Basis ist.

3. Da ähnliche Matrizen die gleiche Determinante haben, folgt
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

4. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A. Es folgt
$$\chi_A(X) = (\lambda_1 - X) \cdot (\lambda_2 - X).$$

5. $\mathrm{Kern}(f)$ besteht definitionsgemäß aus allen Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die auf $0 = 0 \cdot v$ abgebildet werden, also aus dem Eigenraum zum Eigenwert 0; in diesem liegt laut Definition der Eigenvektor v_1 . Also gilt (wegen $\dim(\mathrm{Kern}\ f_a) < 2$):
$$\mathrm{Eig}(f_A, 0) = \mathrm{Kern}(f_A) = v_1\mathbb{R}.$$
Das Bild von f_A kann nach der Dimensionsformel nur $1-$ dimensional sein, muss aber $\lambda_2 \cdot v_2$ enthalten. Es folgt
$$\mathrm{Eig}(f_A, \lambda_2) = \mathrm{Bild}(f_A) = v_2\mathbb{R}.$$
Und wegen
$$\mathbb{R}^2 = v_1\mathbb{R} \oplus v_2\mathbb{R}$$
sind beide Unterräume direkte Komplemente voneinander.

zu Aufgabe 4 [1]

(a)

'(i) ⇒(ii)' Sei $B = (v_1, \ldots, v_r)$ Basis von V. Zu $v \in V$ gibt es dann eine (eindeutige) Darstellung $v = v_1\lambda_1 + \ldots + v_r\lambda_r$. Aus der Linearität von Φ in der ersten Komponente und der Orthonormalität der Familie B folgt dann

$$\Phi(v, v_i) = \Phi(v_1, v_i)\lambda_1 + \ldots + \Phi(v_r, v_i)\lambda_r = 0 + 1 \cdot \lambda_i + 0 = \lambda_i$$

für alle $i = 1, \ldots, r$. Damit ist $v = \sum\limits_{i=1}^{r} v_i \cdot \Phi(v, v_i)$.

'(ii)⇒(i)' Aus der Voraussetzung von (ii) folgt, dass $B = (v_1, \ldots, v_r)$ ein Erzeugendensystem von V ist. Eine orthonormale Familie von Vektoren ist aber auch linear unabhängig (Skript Satz 32.2 (3)); also ist B Basis von V.

(b) Unter Verwendung von allgemeinen Eigenschaften der Determinante erhalten wir:

$$\det A = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A^T) = -\det A$$

und damit $\det A = 0$.
Die Matrix einer Isometrie hat aber stets eine Determinante vom Betrag 1; als kann A nicht Matrix einer solchen Abbildung sein. (*Alternativ:* Jede Isometrie ist invertierbar, eine Matrix mit Determinante 0 hingegen nicht.)

[1] Aufgabenteil (a) frei nach Teilen der Aufgabe 5.4.6 aus Stoppel/Griese: Übungsbuch zur Linearen Algebra. 2011[7]