Name, Vorname	Matrikel-Nr.	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Σ	Note

Nachklausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 4 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' SoSe 2016

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben!
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (fachlich und stilistisch einweindfreie) Darstellung des zielführenden Gedankenganges.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte, also maximal 20 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Matrixdarstelllung, inverse Matrix, Determinante)

(i) Sei $B = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$, und sei $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ definiert durch

$$\begin{aligned} b_1 &= e_3 \\ b_2 &= e_1 + e_2 \\ b_3 &= e_1 \end{aligned} \quad .$$

Bestimmen Sie die Matrix $M := M_B^{\tilde{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ der Identität (als lineare Abbildung!)

Falls Sie M nicht bestimmen konnten, verwenden Sie für die folgenden Aufgabenteile die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Geben Sie den Wert der Determinante von M an (mit Begründung), und folgern Sie aus dem Ergebnis, dass $\tilde{B}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(iii) Berechnen Sie die inverse Matrix von M !

(iv) Geben Sie den Wert der Determinante von M^{-1} an (mit Begründung)!

Aufgabe 2 (Eigenwerte, Eigenbasis, Diagonalisierbarkeit)
Ist folgende Matrix aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenfalls auch eine zugehörige Eigenbasis!
Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst χ_A, die Eigenwerte von A und dann Eigenvektoren! *Kontrollergebnis:* $\chi_A(X) = (2 - X)(-1 - X)(9 - X)$.

Aufgabe 3 (Isometrie, Skalarprodukt, Spiegelung, charakteristisches Polynom)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ sowie $\det(f) < 0$. Zeigen Sie, dass f zwei verschiedene Eigenwerte besitzt!.

Lösungshilfe:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis B.

(i) Bestimmen Sie zunächst das charakteristische Polynom χ_A!

(ii) Bestimmen sie mittels der pq-Formel die Nullstellen von χ_A!

(iii) Zeigen Sie dann mittels $\det(A) < 0$, dass der Radikand positiv ist und damit zwei verschiedene reelle Nullstellen existieren.

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

(i) Es gilt (formal)

$$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Die Spalten der Matrix M erhält man aus

$$\mathrm{id}(b_1) = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \ldots .$$

(ii) (a) Z.B. durch Entwicklung nach der 1.Spalte sieht man:

$$\det M = -1$$

(*Alternativ* ergibt sich der Wert der Determinante durch die Zeilenumformungen von Teil (iii) aus $\det E_3$ unter Berücksichtigung des Faktors -1 wegen einer Zeilenvertauschung.)
(b) Die Matrix M ist also regulär; das durch sie in der obigen Weise aus einer Basis erhaltenen Tupel $\tilde{B}$ ist nach Satz 24.4 aus der Vorlesung ebenfalls Basis. *Alternativ:* Wegen $\det M \neq 0$ ist f_M regulär und bildet eine Basis auf eine Basis ab.

(iii) Durch elementare Zeilenumformungen erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (z_1' = z_1 - z_2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Mit der rechten Seite der Matrix erhält man:

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1} = -1.$

zu Aufgabe 2

Wir betrachten das charakteristische Polynom und bestimmen die zugehörigen Nullstellen. Diese sind die Eigenwerte der Matrix.

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 3 & 4-X & -5 \\ -3 & -5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(16-8X+X^2-25) = (2-X)(-1-X)(9-X).\end{aligned}$$

Da das charakteristische Polynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist A diagonalisierbar. Um eine Eigenbasis zu bestimmen, muss zu jedem Eigenwert ein dazugehöriger Eigenvektor gefunden werden. Dies geschieht durch das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(A-\lambda E_n)\cdot x = 0.$$

Die jeweils erhaltenen Eigenvektoren spannen dann einen Unterraum $V_{A,\lambda}$ von V auf, den Eigenraum von A zu λ.

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{führt zu} \quad (A-\lambda_1 E_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

und zum Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & -5z & =0 \\ -3x & -5y & +2z & =0 \end{array} \right.$$

Mit $-3y-3z=0$ erhält man

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R}.$$

$$\lambda = -1 \quad \text{führt zu} \quad (A-\lambda_2 E_n) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda = 9 \quad \text{zu} \quad (A-\lambda_3 E_n) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -5 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix},$$

woraus man $\mathrm{Eig}(A,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R}$ und $\mathrm{Eig}(A,9) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R}$ erhält.

Die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gehörenden drei Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden daher eine Eigenbasis $C = \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

von V.

Anmerkung: Es ist A also ähnlich zu $M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

zu Aufgabe 3

Zunächst zeigen wir, dass f einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $+1$ und einen Eigenvektor v_2 zum Eigenwert -1 besitzt:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix von f bezüglich der Standardbasis.

(i) Das charakteristische Polynom von f ist dann gleich χ_A mit

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + ad - bc.$$

(ii) Dessen Nullstellen sind

$$\frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}.$$

Da $\det(A) = ad - bc < 0$ ist, besitzt f zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1, λ_2.

Anmerkung: Für jeden Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i folgt wegen $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ sofort

$$\mathrm{id}(v_i) = f^2(v_i) = f(\lambda_i v_i) = \lambda_i^2 v_i$$

und daraus $\lambda_i^2 = 1$; die Eigenwerte haben also den Betrag 1. Folglich ist ein Eigenwert $+1$ der andere -1.

Da v_1 und v_2 als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist $B = (v_1, v_2)$ Basis von $\mathbb{R}^2$. Das Skalarprodukt, das bzgl. der Koordinatenvektoren zur Basis B das kanonische Skalarprodukt ist, hat wegen

$$(v_1, v_1)^2 \widehat{=} (0,1)^2 = 1, \ (v_2, v_2) \widehat{=} (1,0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (v_1, v_2) \widehat{=} (0,1) \cdot (1,0) = 0,$$

$$(1,0) \perp (0,1) \quad \text{sowie} \quad f(v_1) = v_1 \quad \text{und} \quad f(v_2) = -v_2$$

die gewünschten Eigenschaften: B ist eine orthonormale Eigenbasis und f eine Geradenspiegelung.