Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Σ	Note

Nachklausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 4 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' SoSe 2016

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben!
Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einweindfreie) Darstellung des Gedankenganges.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte, also maximal 20 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Matrixdarstelllung, Basiswechsel, inverse Matrix, Determinante)
Sei f die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$, die definiert ist durch

$$f((\alpha, \beta, \gamma)) := (\beta + \gamma, \alpha + \beta).$$

(a) Bestimmen Sie die f darstellende Matrix $M_0 := M_C^B(f)$ bzgl. der kanonischen Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis $C = (c_1, c_2)$ von $\mathbb{R}^2$!

(b) Seien $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ und $\tilde{C} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} \tilde{b}_1 &=& e_3 \\ \tilde{b}_2 &=& e_1 + e_2 \\ \tilde{b}_3 &=& e_1 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcl} \tilde{c}_1 &=& c_2 \\ \tilde{c}_2 &=& c_1. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Matrizen $M_1 := M_B^{\tilde{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ und $M_2 := M_C^{\tilde{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.

Falls Sie M_1 und M_2 nicht bestimmen konnten, verwenden Sie für die folgenden Aufgabenteile die Matrizen

$$M_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Geben Sie den Wert der Determinanten von M_1 und von M_2 an, und folgern Sie aus dem Ergebnis (mittels eines Satzes aus der Vorlesung), dass $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ ebenfalls Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind!

(d) Berechnen Sie die inverse Matrix von M_1 und die von M_2!

(e) Geben Sie die Matrix $M_{\tilde{C}}^{\tilde{B}}(f)$ von f bzgl. der Basis $\tilde{B}$ von $\mathbb{R}^2$ und der Basis $\tilde{C}$ von $\mathbb{R}^3$ als Produkt von bereits bestimmten Matrizen an (ohne das Produkt auszurechnen)!

Aufgabe 2 (Eigenwerte, Eigenbasis, Diagonalisierbarkeit)
Sind folgende Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Wenn ja, zu welcher? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch eine zugehörige Eigenbasis!
Lösungshinweis: $X^2 - 8X - 9 = (-1 - X)(9 - X)$.

Aufgabe 3 (Isometrie, Skalarprodukt, Spiegelung, charakteristisches Polynom)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ sowie $\det(f) < 0$. Zeigen Sie, dass es dann auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt gibt, für das f eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung ist.
Lösungshilfe:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis B.

(i) Bestimmen Sie zunächst das charakteristische Polynom χ_f bzw. χ_A!

(ii) Zeigen Sie dann mittels $\det(f) < 0$, dass χ_A zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2 und eine Eigenbasis $B_1 = (v_1, v_2)$ hat.

(iii) Folgern Sie mit f^2, dass $\lambda_1^2 = 1 = \lambda_2^2$ gilt.

(iv) Begründen Sie, warum das kanonische Skalarprodukt auf dem Raum der Koordinatenvektoren bzgl. Basis B_1 die geforderte Eigenschaft hat!

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

(a) Wegen $f(e_1) = f((1,0,0)) = (0,1)$ und $f(e_2) = f((0,1,0)) = (1,1)$ sowie $f(e_3) = f((0,0,1)) = (1,0)$ erhalten wir

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt (formal)

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (c_1, c_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also gilt

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Z.B. durch Entwicklung nach der 1.Spalte sieht man:

$$\det M_1 = -1 = \det M_2.$$

Die Matrizen M_1 und M_2 sind daher beide regulär; die durch sie in der obigen Weise aus einer Basis erhaltenen Tupel $\tilde{B}$ bzw. $\tilde{C}$ sind (nach einem Satz aus der Vorlesung) jeweils ebenfalls Basen.

(d) Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (z_1' = z_1 - z_2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad (z_1'' = z_3, z_3' = z_1')$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (z_1' = z_2, z_2' = z_1).$$

Mit den rechten Seiten der Matrizen erhält man:

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned} M^{\tilde{B}}_{\tilde{C}}(f) &= M^{C}_{\tilde{C}}(\mathrm{id}) \cdot M^{B}_{C}(f) \cdot M^{\tilde{B}}_{B}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

zu Aufgabe 2

Wir betrachten jeweils das charakteristische Polynom und bestimmen die zugehörigen Nullstellen. Diese sind die Eigenwerte der Matrizen.
Zu A:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 3 & 4-X & -5 \\ -3 & -5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(16-8X+X^2-25) = (2-X)(-1-X)(9-X). \end{aligned}$$

Da das charakteristische Polynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist A diagonalisierbar. Um eine Eigenbasis zu bestimmen, muss zu jedem Eigenwert ein dazugehöriger Eigenvektor gefunden werden. Dies geschieht durch das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n) \cdot x = 0.$$

Die jeweils erhaltenen Eigenvektoren spannen dann einen Unterraum $V_{A,\lambda}$ von V auf, den Eigenraum von A zu λ.

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{führt zu} \quad (A - \lambda_1 E_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

und zum Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & -5z & = 0 \\ -3x & -5y & +2z & = 0 \end{array} \right.$$

Mit $-3y - 3z = 0$ erhält man

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

$$\lambda = -1 \quad \text{führt zu} \quad (A - \lambda_2 E_n) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda = 9 \quad \text{zu} \quad (A - \lambda_3 E_n) = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -5 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix},$$

woraus man $\mathrm{Eig}(A,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ und $\mathrm{Eig}(A,9) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erhält.

Die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gehörenden drei Eigenvektoren sind linear unabhängig und bilden daher eine Eigenbasis $C = \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ von V. Es ist A also ähnlich zu $M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

Wir betrachten nun B. Es gilt

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} -3-X & 5 & 0 \\ 0 & -3-X & 5 \\ 0 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = (-3-X)^3.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren setzten wir den (einzigen) Eigenwert $\lambda = -3$ in das homogene lineare Gleichungssystem $(B - \lambda E_n) \cdot x = 0$ ein und lösen dieses nach x auf. Im vorliegenden Fall ist $B - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, daher jeder Eigenvektor von der Form $x = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $\xi \in \mathbb{R}$). Folglich hat der zugehörige Eigenraum $\mathrm{Eig}(B,-3)$ nicht die Dimension 3, und es existiert keine Eigenbasis von B. Also ist B nicht diagonalisierbar.

zu Aufgabe 3

Zunächst zeigen wir, dass f einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $+1$ und einen Eigenvektor v_2 zum Eigenwert -1 besitzt:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix von f bezüglich der Standardbasis.

(i) Das charakteristische Polynom von f ist dann gleich χ_A mit

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + ad - bc.$$

(ii) Dessen Nullstellen sind

$$\frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}.$$

Da $\det(A) = ad - bc < 0$ ist, besitzt f zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1, λ_2.

(iii) Für einen Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i folgt wegen $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ sofort

$$\mathrm{id}(v_i) = f^2(v_i) = f(\lambda_i v_i) = \lambda_i^2 v_i$$

und daraus $\lambda_i^2 = 1$; die Eigenwerte haben also den Betrag 1. Folglich ist ein Eigenwert $+1$ der andere -1.

(iv) Da v_1 und v_2 als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist $B = (v_1, v_2)$ Basis von $\mathbb{R}^2$. Das Skalarprodukt, das bzgl. der Koordinatenvektoren zur Basis B das kanonische Skalarprodukt ist, hat wegen

$$(v_1, v_1)^2 \widehat{=} (0,1)^2 = 1, \ (v_2, v_2) \widehat{=} (1,0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (v_1, v_2) \widehat{=} (0,1) \cdot (1,0) = 0$$

sowie

$$f(v_1) = v_1 \quad \text{und} \quad f(v_2) = -v_2$$

die gewünschten Eigenschaften: B ist eine orthonormale Eigenbasis und f eine Spiegelung.