Übungen
zum Lehrerweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W8 (Fortsetzungssatz, Kern)
Seien $V = \mathbb{R}^3$ der 3-dim reelle Vektorraum und $f_1 : V \to V$ Endomorphismus mit $f_1(e_1) = e_1,\ f_1(e_2) = e_3,\ f_1(e_3) = e_2$ für $e_i = (\delta_{ij})_{j=1,2,3}$.
(i) Welcher Satz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von f_1.
(ii) Bestimmen Sie Kernf_1.
(iii) Begründen Sie $f_1(v_1) = v_1$ für $v_1 = e_2 + e_3$ sowie $f_1(w_1) = -w_1$ für $w_1 = e_2 - e_3$.
(iv) Geben Sie eine Ebene E_1 von V an, die punktweise unter f_1 fest bleibt.
(v) Ist f_1 (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts) eine Drehung, eine Spiegelung an einer Ebene, eine Streckung oder eine Parallelprojektion auf eine Ebene? (Antwort ohne Beweis!)
(vi) Wählen Sie eine Basis B von V aus, und geben Sie eine Matrix von f_1 bzgl. B an!

Lösungsskizze:
(i) Da $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, garantiert der Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen, dass f_1 existiert und eindeutig bestimmt ist.
(ii) Weil f_1 die Basis B auf sich abbildet, ist f_1 surjektiv, daher (z.B. aus Dimensionsgründen) injektiv, folglich Kern $f_1 = \{0\}$.
(Alternativ: $0 = f_1(\sum\limits_{i=1}^{3} e_i\lambda_i) = \sum\limits_{i=1}^{3} f_1(e_i)\lambda_i = e_1\lambda_1 + e_3\lambda_2 + e_2\lambda_3$ impliziert $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.)
(iii) Aus der Additivität von f_1 folgt:
$f_1(v_1) = f_1(e_2 + e_3) = f_1(e_2) + f_1(e_3) = e_3 + e_2 = v_1$ und
$f_1(w_1) = f_1(e_2 - e_3) = f_1(e_2) - f_1(e_3) = e_3 - e_2 = -w_1$.
(iv) Nach Definition von f_1 und nach Teilaufgabe (iii) sind e_1 und $v_1 = e_2 + e_3$ Fixpunkte von f_1. Wegen der Linearität von f_1 bleibt dann jede Linearkombination dieser Elemente fest:

$$f_1(e_1\lambda_1 + v_1\lambda_2) = f_1(e_1)\lambda_1 + f_1(v_1)\lambda_2) = e_1\lambda_1 + v_1\lambda_2.$$

Also bleibt $E_1 := \text{Spann}(\{e_1, e_2 + e_3\})$ punktweise fest; E_1 hat Dimension 2; also ist E_1 die gesuchte Fixpunktebene.
(v) f_1 ist eine Ebenen-Spiegelung (mit Achse E_1).
Anmerkung:
Jeder Vektor $w = w_1\lambda$ der (zu E_1 senkrechten) Geraden Spann$(\{w_1\})$ wird

auf $-w$ abgebildet. Bei einer nicht-trivialen Drehung bleibt nur eine Gerade punktweise fest, bei einer nicht-trivialen zentrischen Streckung nur ein Punkt. Eine Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene ist nicht bijektiv.
(vi) Z.B. ergibt die Wahl von $B_1 := (e_1, e_2, e_3)$ als Basis die Matrix

$$M_{B_1}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

ein weiteres Beispiel liefert die Basis $B_2 := (e_1, e_2+e_3, e_2-e_3)$; die zugehörige Matrix ist dann $M_{B_2}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(Aus $\det(f_1) = -1$ sieht man erneut, dass f_1 keine Drehung ist.)