Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe W6 (Lineare Abhängigkeit, Linearformen)

Seien $a_1, \ldots, a_k$ Vektoren aus $V = \mathbb{R}^n$ und (für $i = 1, \ldots, k$) die Abbildung $f_{a_i} : V \to V$ Linearform mit Matrix a_i (bzgl. der kanonischen Basen $B = (e_1, \ldots, e_n)$ und $C = (1)$), ferner

$$A := (f_{a_j}(a_i))_{i,j=1,\ldots,k} = \begin{pmatrix} f_{a_1}(a_1) & \cdots & f_{a_k}(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{a_1}(a_k) & \cdots & f_{a_k}(a_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,k)}.$$

Zeigen Sie:

(i) A ist symmetrisch.
Hinweis: Gilt $f_a(s) = f_s(a)$ für $a, s \in \mathbb{R}^n$?

(ii) $f_{a_1}, \ldots f_{a_k}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a_1, \ldots a_k$ dies sind.

Lösungsskizze

(i) Mit $a = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ und $s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ist definitionsgemäß $f_a(s) = f_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}((\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ gleich $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \sigma_j$ und damit auch gleich $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j \alpha_j = f_{(\sigma_1 \ldots \sigma_n)}((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = f_s(a)$.
Anwendung auf $a = a_i$ und $s = a_j$ zeigt die Symmetrie von A.

(ii) $f_{a_1}, \ldots f_{a_k}$ sind genau dann linear abhängig, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nicht alle 0, gibt mit $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{a_i} \lambda_i = 0$.

Nun gilt:
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} f_{a_i} \lambda_i = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} f_{a_i} \lambda_i\right)(w) = 0 \text{ für alle } w \in \mathbb{R}^n \\ &\overset{s.o.}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{k} f_w(a_i) \lambda_i = 0 \text{ für alle } w \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f_w\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i\right) = 0 \text{ für alle } w \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.