Übung zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W5 (LGS, Endomorphismus, Kern, Rang, volles Urbild)

(a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \xi_1 & & +\xi_3 & & = & 1 \\ & \xi_2 & & +\xi_4 & = & 1 \\ & \xi_2 & +\xi_3 & & = & 1 \\ \xi_1 & +\xi_2 & +\xi_3 & +\xi_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems sowie den Lösungsraum L von $(*)$!

(b) Seien $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^4$ und f ein Endomorphismus von V (also eine lineare Abbildung von V in sich), für den gilt:

$$(\Diamond)\quad \left\{\begin{array}{cccccc} f(b_1) & = & b_1 & & & +b_4 \\ f(b_2) & = & & b_2 & +b_3 & +b_4 \\ f(b_3) & = & b_1 & & +b_3 & +b_4 \\ f(b_4) & = & & b_2 & & +b_4 \end{array}\right. .$$

(i) Nach welchem Satz ist f eindeutig bestimmt?

(ii) Bestimmen Sie Kern f ! Gibt es einen Zusammenhang mit Teil (a) dieser Aufgabe ?

(iii) Welchen Rang hat die Matrix $A = M_B^B(f)$ von f ?

(iv) Geben Sie das volle Urbild des Vektors $w := b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4$ unter f an!

Lösungsskizze:

(a) Die zu $(*)$ gehörende Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

geht durch elementare Zeilenumformungen (z.B. mit $z_4 \mapsto z_4 - z_1 - z_2$ und $z_3 \mapsto z_3 - z_2$) in die Matrix (in Zeilenstufenform)

$$\left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zu einem linearen Gleichungssystem mit gleichem Lösungsraum über. Für das zugehörige homogene System erhält man die Bedingungen $\xi_3 = \xi_4 = -\xi_2 = -\xi_1$, woraus

$$L_0 = (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R}$$

folgt.

Eine Partikulärlösung ergibt sich aus $\xi_3 = \xi_4 = 1 - \xi_2 = 1 - \xi_1$ zum Beispiel als $p = (1, 1, 0, 0)$.

Aus $L = p + L_0$ erhält man somit

$$L = (1, 1, 0, 0) + (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - \xi, 1 - \xi, \xi, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}.$$

(b) (i) Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung ist eine lineare Abbildung schon durch die Bilder der Vektoren einer geordneten Basis des Urbildraumes bestimmt. Also ist f eindeutig bestimmt.

(ii) Die Matrix von f bzgl. der Basis B hat als Spalten die Koordinaten der Bilder der Vektoren von B. Sie ist somit

$$A := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems aus Teil (a). Daher besteht Kern$f$ aus allen Vektoren, deren Koordinatenvektoren bzgl. der Basis B in der Lösungsmenge L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen linearen Gleichungssystems liegen.

Also gilt: $\quad$ Kern $f = (-b_1 - b_2 + b_3 + b_4)\mathbb{R}$.

(iii) Wie man aus (ii) sieht, ist $\dim \operatorname{Kern} f = 1$, somit (nach der entsprechenden Dimensionsformel)

$$\operatorname{Rang} A = 4 - \dim \operatorname{Kern} f = 3.$$

(iv) Die Koordinatenvektoren der Vektoren des vollen Urbildes von w sind genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $(*)$ aus Teil (a) und damit die Elemente von L. Also folgt

$$f^{-}(w) = b_1 + b_2 + (-b_1 - b_2 + b_3 + b_4)\mathbb{R}.$$