Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe W4 (Fortsetzungssatz, Matrixdarstellung, LGS)
Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an mit $f(1, 2, -1) = (1, 0)$, $f(2, 1, 4) = (0, 1)$ und die Matrix $M(f)$ (bezüglich der kanonischen Basen) an! Zeigen Sie, dass f nicht eindeutig bestimmt ist.

Lösungsskizze:
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$. (Der dritte Vektor ist fast beliebig, er muss nur linear unabhängig von den anderen beiden sein).
Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung ist f eindeutig bestimmt, wenn wir $f(0, 0, 1)$ vorgeben. Damit sind Existenz und Mehrdeutigkeit gezeigt.
Nun soll noch eine Lösung angegeben werden. Wir setzen an:

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir daraus vier Gleichungen in sechs Unbekannten; setzen wir $a_{13} = a_{23} = 0$, so ergibt sich z.B. als Lösung:

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

also

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$