Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe W3 (Matrixumformung, LGS)

Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

(i) Bringen Sie A_1 durch Spalten(!)-Umformungen auf eine Matrix B_1 in Zeilenstufenform!

(ii) Bestimmen Sie (ohne Verwendung der entsprechenden Sätze) den Zeilen-Rang von A_1 und von B_1 !

(iii) Zeigen Sie (bei geeigneter Wahl von c), dass die linearen Gleichungssysteme $A_1x = c$ und $B_1x = c$ verschiedene Lösungsräume besitzen!

Lösungsskizze

(i) Z.B. führt die Substraktion des 2-Fachen der 3.Spalte von der ersten Spalte und der 3.Spalte von der 2.Spalte zu $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Wegen der Position der Nullen in den Zeilen 2,3 und 4 von A_1 folgt sehr schnell die lineare Unabhängigkeit dieser Zeilen; daher gilt $3 \leq \operatorname{rg}(A_1) \leq 3$. Entsprechendes gilt für die drei letzten Zeilen von B_1. Somit ist $\operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} B_1 = 3$.

(iii) Z.B. ist $x = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung des linearen Gleichungssystems $A_1x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hingegen ist B_1e_1 gleich der (von der 1.Spalte von A_1 verschiedenen) 1.Spalte von B_1 und damit e_1 keine Lösung des Systems $B_1x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Anmerkung: Im Gegensatz zur Situation bei Zeilenumformungen wird bei

Spaltenumformungen der Koeffizientenmatrix die rechte Seite des linearen Gleichungssystems nicht transformiert. Man müsste daher auch die Lösungsvektoren entsprechend den Spaltenumformungen transformieren.