Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe W1 (Ebene, Orthogonalraum, LGS)

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und E die Ebene in $AG(V)$, die durch die Punkte

$$(1,0,0), (0,2,0) \text{ und } (0,0,2)$$

geht. Bestimmen Sie:

(i) die zu E parallele Ebene E_0 durch den Nullpunkt,

(ii) den Orthogonalraum ${E_0}^\perp$ von E_0 ,

(iii) ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum E_0 ist, und ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum E ist!

Lösungsskizze

(i) Nach der Dreipunkteformel ist

$$E = (1,0,0) + [(0,2,0) - (1,0,0)]\mathbb{R} + [(0,0,2) - (1,0,0)]\mathbb{R}.$$

Daraus ergibt sich : $E_0 =< (-1,2,0), (-1,0,2) >$.

(ii) ${E_0}^\perp$ hat die Dimension $\mathrm{codim}_V E_0 = \dim V - \dim E_0 = 3 - 2 = 1$, und jedes Element von ${E_0}^\perp$ wird (bezüglich der kanonischen Basis) durch eine $1 \times 3-$Matrix $(a\ b\ c)$ dargestellt, die die Vektoren von E_0 annulliert. Es folgt $a = 2b = 2c$ und damit ${E_0}^\perp = (1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})\,\mathbb{R}$.

(iii) Aus (ii) folgt, dass E_0 Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung $(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T = 0$ ist und E Lösungsraum von

$$\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 = 1,$$

(was man in diesem einfachen Fall auch direkt hätte erraten können).