Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C3 (Eigenwert, Diagonalisierbarkeit, Geradenspiegelung)

Eine lineare Abbildung f der reellen euklidischen Ebene in sich habe bzgl. der kanonischen Basis die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in (0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass f eine Geradenspiegelung ist.
Lösungshinweis: Man zeige u. a. , dass eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert.

Lösungsskizze
Gemäß Lösungshilfe zeigen wir: Es existiert eine Orthonormalbasis B mit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dafür bestimmen wir zunächst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -\cos\varphi - x & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - x \end{pmatrix} = x^2 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = x^2 - 1.$$

Als Eigenwerte ergeben sich damit $\lambda_{1/2} = \pm 1$.
Somit ist f diagonalisierbar mit einer Eigenbasis B, bzgl. der f die oben angegebene Matrixdarstellung hat.
Da die darstellende Matrix symmetrisch ist, sind nach Aufgabe C1 die Basisvektoren sogar orthogonal, was alles zeigt.