Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C2 (Eigenwert, Eigenraum, Diagonalähnlichkeit)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume! Ist A diagonalähnlich?

Lösungsskizze

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi(X) = (1 - X)^3 + 1 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(-X^2 + X - 1);$$

die Zerlegung in Faktoren erhält man dabei z.B. durch Erraten der Lösung 2 und Division des Polynoms durch $(X - 2)$.

Da der zweite Faktor zu keiner reellen Lösung führt, ist 2 der einzige Eigenwert, die einzige Nullstelle von $\chi(X)$. Der dazu gehörige Eigenraum besteht aus allen Lösungen von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wird vom Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt.

A ist als reelle Matrix nicht diagonalisierbar, weil andernfalls χ in Linearfaktoren zerfallen müsste.