

## Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”

**Aufgabe A7** (Lineare Unabhängigkeit, Linearformen, Determinante)  
(Fortsetzung von Aufgabe W6)

Seien  $a_1, \dots, a_k$  Vektoren aus  $V = \mathbb{R}^n$  und (für  $i = 1, \dots, k$ ) die Abbildung  $f_{a_i} : V \rightarrow \mathbb{R}$  Linearform mit Matrix  $a_i$  (bzgl. der kanonischen Basis), ferner

$$A := (f_{a_j}(a_i))_{i,j=1,\dots,k} = \begin{pmatrix} f_{a_1}(a_1) & \cdots & f_{a_k}(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{a_1}(a_k) & \cdots & f_{a_k}(a_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,k)}.$$

Zeigen Sie:

Ist  $\det A \neq 0$ , so sind  $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$  linear unabhängig.

*Hinweis:* Wenden Sie  $\sum_{j=1}^k f_{a_j} \lambda_j = 0$  auf  $a_i$  an (für  $i = 1, \dots, k$ ); was erhalten Sie für  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$ ?

*Anmerkung:* Umgekehrt gilt auch: Ist  $\det A = 0$ , so sind  $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$  linear abhängig.

### Lösungsskizze

Sei  $\sum_{j=1}^k f_{a_j} \lambda_j = 0$ . Dann folgt aus

$$\left(\sum_{j=1}^k f_{a_j} \lambda_j\right)(a_i) = \sum_{j=1}^k f_{a_j}(a_i) \lambda_j = (f_{a_1}(a_i) \cdots f_{a_k}(a_i))(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$$

für  $i = 1, \dots, k$ , dass  $A(\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T = 0$  gilt. Wegen  $\det A \neq 0$  hat dieses Gleichungssystem nur die triviale Lösung, woraus die sich die lineare Unabhängigkeit von  $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$  ergibt.