Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”

Aufgabe A4 (Polynom, Interpolation, LGS, Vandermonde-Determinante)
Zeigen Sie, dass es genau ein reelles (Interpolations-) Polynom g vom Grad kleiner gleich n gibt, das an den Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$) die Funktionswerte $y_0, y_1, y_2, \dots y_n \in \mathbb{R}$ annimmt.

Lösungsskizze: Lösung des Interpolations-Problems ist jedes Polynom g mit $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, für das gilt: $g(x_j) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i {x_j}^i = y_j$. Koeffizientenmatrix des entsprechenden linearen Gleichungssystems für die a_i ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Vandermonde-Matrix. Deren Determinante ist gleich $\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$.

Wegen $x_i \neq x_j$ ist in vorliegendem Fall $\det A \neq 0$, also A regulär. Somit existiert g und ist eindeutig bestimmt.