Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D5 (Isometrie, orthogonale Abbildung)
Sei ψ das kanonische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{(n,1)}$ und M eine reelle $n\times n$-Matrix. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die lineare Abbildung

$$m : \mathbb{R}^{(n,1)} \to \mathbb{R}^{(n,1)} \quad \text{mit} \quad m(v) = M \cdot v$$

das Skalarprodukt ψ erhält, dass also $\psi(m(u), m(v)) = \psi(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$ gilt.

Lösungsskizze
Bezüglich der kanonischen Basis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ ist M die Matrix M_B^B von m, und jeder Vektor u hat u als Koordinatenvektor. Die Fundamentalmatrix des kanonischen Skalarprodukts ψ bezüglich der kanonischen Basis, also

$$(\psi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots n},$$

ist gleich E_n. Es gilt also $\psi(u, v) = u^T v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$.
Man erhält damit

$$(*) \quad \psi(u, v) = \psi(m(u), m(v)) \Longleftrightarrow u^T v = (Mu)^T (Mv) = u^T M^T M v$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$. Einsetzen von (e_i, e_j) für (u, v) liefert den Eintrag von Stelle (i, j), nämlich $e_i^T e_j = e_i^T M^T M e_j$; dies zeigt die Notwendigkeit von $M^T M = E_n$. (M heißt dann "orthogonale" Matrix.)
Diese Bedingung ist wegen $(*)$ auch hinreichend.