Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D4 (orthogonale Abbildung, invarianter Unterraum)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum; weiter sei φ ein Skalarprodukt auf V ; sei schließlich $f \in \text{End}\ (V)$ orthogonal bzgl. φ (reelle Isometrie) , d.h. es gelte

$$\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \text{ für alle } x, y \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist bijektiv.

(b) Ist U ein f-invarianter Unterraum, so ist auch $U^\perp$ ein f-invarianter Unterraum, und es gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Lösungsskizze

zu (a): Sei $x \in \text{Kern}\, f$. Aus $f(x) = 0$ folgt wegen $\varphi(f(x), f(x)) = \varphi(x, x) = 0$ mit der positiven Definitheit $x = 0$ und damit Kern $f = \{0\}$. Also ist f injektiv und wegen $\dim V < \infty$ auch bijektiv.

zu b) Wir zeigen: (i) $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ und (ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$:

(i) Sei U f-invariant. Dann ist $f(U) \subseteq U$ und nach a) aus Dimensionsgründen auch $f(U) = U$.Es folgt:

$$\begin{aligned} f(U^\perp) &= \{f(v) | \varphi(v, U) = 0\} = \{f(v) | \varphi(f(v), f(U)) = 0\} \\ &= \{\underbrace{f(v)}_{=:w} | \varphi(f(v), U) = 0\} = \{w | \varphi(w, U) = 0\} = U^\perp. \end{aligned}$$

(ii) Sei $v \in U \cap U^\perp$; nach Definition von $U^\perp$ gilt dann $\varphi(v, v) = 0$ und somit $v = 0$.