

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

### Aufgabe D3 (Skalarprodukt, Orthogonalität, positive Definitheit)

Gibt es ein Skalarprodukt  $g$  auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  derart, dass gilt:

$$(1, 0) \perp_g (0, 1) \text{ und } (2, -2) \perp_g (-1, 1) ?$$

( $\perp_g$  bezeichnet dabei die durch  $g$  induzierte Orthogonalitätsrelation auf  $\mathbb{R}^2$ .)

*Lösungshinweis:* Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform  $g$  der geforderten Eigenschaften, und prüfen Sie, ob  $g$  Skalarprodukt ist!

### Lösungsskizze

Allgemein gilt für eine symmetrische Bilinearform  $g$ :

$$g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  die zugehörige (symmetrische) Fundamentalmatrix ist. Es gilt:

$$(1, 0) \perp_g (0, 1) \iff 0 = g((1, 0), (0, 1)) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff c = 0,$$

ferner mit  $c = 0$  dann

$$(2, -2) \perp_g (-1, 1) \iff 0 = (2 \ -2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff b = -a.$$

Wäre  $g$  Skalarprodukt, so müsste  $g$  bzw. die zugehörige Fundamentalmatrix  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$  positiv definit sein.

1. Fall:  $a \leq 0$ ; dann ist  $(1 \ 0) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \leq 0$ , ein Widerspruch zu  $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$  für  $\vec{x} \neq 0$ .

2. Fall:  $a > 0$ ; dann ist  $(0 \ 1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -a < 0$ , erneut ein Widerspruch zu  $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$  für  $\vec{x} \neq 0$ . Also ist die gefundene Bilinearform nicht positiv definit, und es gibt kein Skalarprodukt der geforderten Eigenschaft.

*Alternative Lösung:* Eine symmetrische Matrix  $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A$  ist genau dann positiv definit, wenn  $a > 0$  und  $\det A > 0$ . (S. Literatur!)

2. *Alternative:* Eine symmetrische reelle Matrix  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix  $\hat{A}$ . Auf der Diagonalen von  $\hat{A}$  stehen die Eigenwerte von  $\hat{A}$  (und damit von  $A$ ). Die reelle Matrix  $\hat{A}$  und damit  $A$  ist also genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.