Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D2 (Orthogonalraum)

Sei W der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von $u = (1, 0, -1, 2)$ und $v = (2, 0, 2, -1)$ aufgespannt wird; sei ferner $W^\perp$ der Orthogonalraum (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts) von W in $\mathbb{R}^4$ durch den Nullpunkt .

(a) Welche Dimension hat $W^\perp$?

(b) Geben Sie eine Basis B von $W^\perp$ an!

Lösungsskizze

(a) Da $W = \langle u, v\rangle$ und u, v linear unabhängig sind, folgt $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$; nach der Dimensionsformel für orthogonale Unterräume (hergeleitet aus der für lineare Gleichungssysteme) gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} W^\perp = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} W = 4 - 2 = \underline{2}.$$

(b) Wir suchen Vektoren $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ aus $W^\perp$:

$$x \in W^\perp \iff \big(u \cdot x = 0 \ \wedge\ v \cdot x = 0\big) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x^T = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = 0 \iff \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 + 2\xi_4 = 0 \\ 4\xi_3 - 5\xi_4 \quad\;\; = 0 \end{cases}$$

Wir erhalten z.B. die linear unabhängigen Vektoren $w_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $w_2 = (-3, 0, 5, 4)$ aus $W^\perp$ (Probe?[1]), sodass (w_1, w_2) aus Dimensionsgründen eine Basis von $W^\perp$ ist.

[1] Sind nicht, wie hier, alle Umformungen Äquivalenzumformungen, so ist (wegen der Beweisrichtung) die Probe unerlässlich.