Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D1 (orthogonal, linear unabhängig)
Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass in V jede orthonormale Teilmenge $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$, also eine Menge von paarweise orthogonalen Vektoren der Länge 1 von V, linear unabhängig ist.

Lösungsskizze

Wegen $< u_i, u_j >= \delta_{ij}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = 0 \Longrightarrow 0 = \langle 0, u_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

(für alle $j = 1, \ldots, r$).

Daher ist U linear unabhängig. $\square$