Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Σ	Note

Klausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 4
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'
SoSe 2016

Bearbeiten Sie bitte zwei der folgenden drei Aufgaben!
Falls Sie alle Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die stilistisch einweindfreie Darstellung des Gedankenganges.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte, also maximal 20 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Matrixdarstellllung, inverse Matrix, Determinante)
Seien V ein 3−dimensionaler reeller Vektorraum, ferner $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2 - b_3 \\ f(b_2) &= -b_1 + b_2 \\ f(b_3) &= b_1 - b_2 + b_3 \end{aligned}$$

(i) Geben Sie (ohne Begründung) die Matrix $A = M_B^B(f)$ an!
Hinweis: Falls Sie sich nicht sicher sind, ob Sie die richtige Matrix angegeben haben, wählen Sie für die weiteren Aufgabenteile statt A die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und statt f die zu A_1 gehörende lineare Abbildung f_1 !

(ii) Zeigen Sie: $\det(A) \neq 0$.

(iii) Berechnen Sie A^{-1}

(iv) Welchen Wert hat $\det(A^{-1})$?

(v) Geben Sie eine kurze Begründung dafür an, dass f invertierbar ist!

(vi) Berechnen Sie $f^{-1}(b_2)$.

Aufgabe 2 (Eigenwert, charakteristisches Polynom)
Sei $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) 1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_t !

2. Bestimmen Sie die (reellen!) Eigenwerte von A_t in Abhängigkeit von t !

3. Berechnen Sie im Falle $t = 0$ den zu A_0 gehörenden Eigenraum!

(b) Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

1. Ist f ein Automorphismus und λ ein Eigenwert von f, so gilt: $\lambda \neq 0$.
2. Ist f ein Automorphismus und v ein Eigenvektor von f, so ist v auch Eigenvektor von f^{-1}.
   Lösungshinweis: Wenden Sie f^{-1} auf die Gleichung $f(v) = \lambda v$ an!
   Ohne Beweis dürfen Sie benutzen, dass f^{-1} ebenfalls linear ist.

Aufgabe 3 (orthogonale Abbildung, Skalarprodukt)

1. Sei (V, Φ) ein euklidischer Vektorraum (also reeller Vektorraum mit Skalarprodukt Φ); sei ferner f ein Automorphismus von V, der mit dem Skalarprodukt Φ verträglich ist (also ein SKP-Automorphismus von (V, Φ))! Zeigen Sie, dass f die Orthogonalität von Vektoren erhält, dass also für alle $v, w \in V$ gilt:
$$v \perp_\Phi w \Longleftrightarrow f(v) \perp_\Phi f(w).$$

2. Gibt es ein Skalarprodukt g auf $\mathbb{R}^2$ mit
$$(*) \quad (0,1) \perp_g (-1,1) \quad \text{und} \quad ||(0,1)||_g = 1 = ||(-1,1)||_g?$$

   Lösungshinweis:

   (i) Bestimmen Sie zunächst die Matrix A_g einer symmetrischen Bilinearform, die $(*)$ erfüllt!

   (ii) Zeigen Sie, dass g positiv definit ist.
   Hinweis: $2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x^2 + 2xy + y^2)$.

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

(i)

$$A := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)/(iii) Wir berechnen die Determinante und die Inverse von A gemeinsam durch (auch für die Determinantenberechnung zulässige) elementare Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} (z_1' = z_1 + z_2 \\ z_2' = z_2 + z_3) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (z_3' = z_3 + z_1')$$

Da jeweils zu Zeilen nur Linearkombinationen von anderen Zeilen addiert wurden, ist $\det(A) = \det(E_3) = 1$ (siehe linke Seite der erhaltenen Matrix). Ferner folgt (mit der rechten Seite der Matrix)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man $\det A$ auch mit der Formel von Sarrus oder mit der Entwicklung nach Laplace berechnen.

(iv) Da $\det(A) = 1$ ist, gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$.

Alternativ lässt sich $\det(A^{-1})$ mit Laplace oder Sarrus direkt aus A^{-1} berechnen.

(v) Wegen $\det(f) = \det(M_B^B(f)) \neq 0$ ist f regulär und lässt sich (nach einem Satz aus der Vorlesung) invertieren.

(vi) Es gilt $f^{-1}(b_2) = b_1 + b_2 + b_3$ z.B. wegen $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

zu Aufgabe 2

(a) 1.

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & 0 & t-1 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x(t-1) + x \\ &= -x^3 + xt = -x(x^2 - t). \end{aligned}$$

2. Als Eigenwerte kommen nach Teil 1 in Frage: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{t}$. Im Falle $t > 0$ gibt es daher 3 verschiedene Eigenwerte, im Fall $t = 0$ den einzigen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ in algebraischer Vielfachheit 3 und im Falle $t < 0$ den rellen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ in Vielfachheit 1.
3. Im Falle $t = 0$ ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A_0 (s. Teil 2!). Nun gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow z = 0 \wedge x + y = 0.$$

Der zugehörige Eigenraum ist $\mathrm{Eig}(A_0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

(b)

1. Wäre $\lambda = 0$, so existierte ein Eigenvektor $v \neq 0$ mit $f(v) = 0 \cdot v = 0$. Damit wäre $\mathrm{Kern} f \neq \{0\}$ und f nicht injektiv.
2. Da λ Eigenwert von f ist, existiert ein Eigenvektor v mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$. Nach Teil 1 ist $\lambda \neq 0$; da f^{-1} ebenfalls linear ist, folgt $v = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$ und daraus $\lambda^{-1} v = f^{-1}(v)$. Also ist v Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von f^{-1} .

zu Aufgabe 3

1. Mit der Definition $v \perp_g w :\Longleftrightarrow \Phi(v, w) = 0$ gilt (wegen der Verträglichkeit von Φ und f) für alle $v, w \in V$:

$$v \perp_\Phi w \Longleftrightarrow \Phi(v, w) = 0 \Longleftrightarrow \Phi(f(v), f(w)) = 0 \Longleftrightarrow f(v) \perp_\Phi f(w).$$

2. Zur Klärung der Existenz eines Skalarprodukts g der geforderten Eigenschaften sei

$$A_g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

die (symmetrische !) Fundamentalmatrix einer symmetrischen Bilinearform g (bzgl. der kanonischen Basis)!

(i) Es muss dann wegen $(*)$ gelten:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\beta + \gamma,$$

damit

$$1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$$

und schließlich

$$1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha - 1.$$

Als einzige Möglichkeit bleibt $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Umgekehrt (!) erfüllt eine (symmetrische) Bilinearform g mit dieser Matrix die Forderungen $(*)$.

(ii) Zu untersuchen bleibt, ob diese Matrix (und damit g) positiv definit ist:

$$\begin{aligned} g((\xi,\eta),(\xi,\eta)) &= (\xi \quad \eta)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (2\xi+\eta)\xi + (\xi+\eta)\eta \\ &= 2\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = \xi^2 + (\xi+\eta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Und $g((\xi,\eta),(\xi,\eta)) = 0$ gilt nach der vorigen Berechnung nur für $(\xi,\eta) = (0,0)$. Also ist g positiv definit.

Damit ist nachgewiesen, dass ein Skalarprodukt der geforderten Eigenschaften existiert.
Anmerkung: Eine vom Lösungshinweis abweichende schnellere Argumentation geht wie folgt: In der darstellenden Matrix $M_B(g)$ einer Bilinearform g bzgl. einer Basis $B = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{R}^2$ stehen die Einträge $g(b_i, b_j)$; mit $b_1 = (0,1)$ und $b_2 = (-1,1)$ ergibt sich $M_B(g) = E_2$; und E_2 ist positiv definit.