Modulprüfung zur Analysis II
Lösungen
Weiterbildung für Lehrer an der FU
Dozent: V.Schulze Datum: 1.7.2016 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3		Punktsumme	Note
Punkte						

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 15 Punkte; insgesamt also maximal 45 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{sin(x^2)}{x^2} & falls \quad x > 0 \\ x+1 & falls \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(i) Ist f stetig an der Stelle $x = 0$?
(ii)Ist f diferenzierbar an der Stelle $x = 0$?
(iii) Existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$?

Lösung
(i)Nach der Regel von l'Hospital gilt $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xcos(x^2)}{2x} = 1$.
Ferner gilt $\lim_{x\to 0}(x+1) = 1$.
Also ist f stetig an der Stelle $x = 0$.

(ii) Für $h > 0$ gilt $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(o)}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{\frac{sin(h^2)}{h^2}}{h} - \frac{1}{h}) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(h^2)-h^2}{h^3}$,
und nach l'Hospital ist $\lim_{h\to 0} \frac{sin(h^2)-h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{2hcos(h^2)-2h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2cos(h^2)-2}{3h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4hsin(h^2)}{3} = 0$.
Für $h < 0$ gilt $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(o)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+1-1}{h} = 1$.
Links- und rechtsseiige Ableitung stimmen also nicht überein.
Also ist f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

(iii) Es gilt $\mid \frac{1}{x^2} sin(x^2) \mid \leq \mid \frac{1}{x^2} \mid$.
Nach dem Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale existiert also $\int_1^\infty f(x)dx$.

Aufgabe 2

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{2^n n}$?
(ii) Zeigen Sie, daß die Potenzreihe aus (i) konvergent ist für genau alle $x \in [-1, 3)$.
(iii) Für welche x konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(2x-1)^n}{2^n n}$?

Lösung

(i) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$.
Also ist der Konvergenzradius $r = 2$.
(ii) Die Potenzreihe besitzt nach (i) den Konvergenzradius 2 und den Entwicklungspunkt 1.
Also konvergiert die Potenzreihe für $x \in (-1, 3)$ und sie divergiert für $x \notin [-1, 3]$.
Die Randpunkte des Konvergenzintervalls werden getrennt untersucht.
Für $x = 3$ konvergiert die Potenzreihe nicht, da die harmonische Reihe nach Vorlesung nicht konvergiert.
Für $x = -1$ konvergiert die Potenzreihe, da die alternierende harmonische Reihe nach Vorlesung konvergiert.
(iii) Es gilt $2x \in [-1, 3)$ genau dann, wenn $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
Nach (ii) konvergiert die Fuktionenreihe also genau ür $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 - xsiny$.
(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt (x_0, y_0).
(ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(x_0, y_0)$.
(iii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 0)$.

Lösung

(i) Für die partiellen Ableitungen gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - siny$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = -xcosy$.
Der gesuchte Gradient ist also $(2x_0 - siny_0, -x_0 cosy_0)$.
(ii) Da die partiellen Ableitungen von f in einer ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0, y_0)$ stetig sind, gilt für die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 1 = 2x_0 - siny_0 - x_0 cosy_0$.

(iii) Die Gleichung der Tangentialebene lautet $z = f'_x(1,0)x + f'_y(1,0)y + c$, also $z = 2x - y + c$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten c.
Es gilt $f(1,0) = 1$ und der Punkt $(1,0,f(1,0))$ liegt auf der Tangentialebene.
Durch einsetzen ergibt sich $1 = 2 \cdot 1 - 0 + c$, also $c = -1$.
Die Gleichung der Tangentialebene lautet also $z = 2x - y - 1$.

Aufgabe 4

(i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{lnx}{x} dx$.
Hinweis: Verwende partielle Integration.

(ii) Existiert das unbestimmte Ingral $\int_1^\infty \frac{lnx}{x} dx$?

(iii) Existiert das unbestimmte Ingral $\int_1^\infty \frac{lnx}{x^2} dx$?

Lösung
(i) Wird $u = lnx$ und $v' = \frac{1}{x}$ gesetzt, so folgt $u' = \frac{1}{x}$ und $v = lnx$. Partielle Integration liefert $\int \frac{lnx}{x} dx = (lnx)(lnx) - \int \frac{lnx}{x} dx + c$, also $\int \frac{lnx}{x} dx = \frac{1}{2}(lnx)^2 + c$.
(ii) Das uneigentliche Integral existiert nicht, denn es gilt nach (i)
$\int_1^\infty \frac{lnx}{x} dx = \lim_{t\to\infty}(lnt)^2 = \infty$.
Ohne Verwendung von (i) ergibt sich das Egebnis auch aus dem Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale wegen $| \frac{lnx}{x} | \geq \frac{1}{x}$ für $x \geq e$.
(iii) Das uneigentliche Integral existiert nicht. Dies ergibt sich aus dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale, da für hinreichend große x die Ungleichung $\frac{lnx}{x^2} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ gilt.
Diese Ungleichung ist gleichwertig mit $\frac{lnx}{\sqrt{x}} \leq 1$ für hinreichend große x und dies ergibt sich durch Anwendung von l'Hospial aus
$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.