Modulprüfung zur Analysis II (Nachklausur)

Weiterbildung für Lehrer an der FU

Dozent: V.Schulze Datum: 15.7.2016 Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Lösungen

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3		Punktsumme	Note
Punkte						

Bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 15 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{cos\frac{1}{x}}{x^2} & falls \quad x > 0 \\ 0 & falls \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(i) Ist f stetig ?
(ii) Existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$?
(iii) Bestimmen Sie für $x > 0$ das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$
und berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals aus (ii).

Lösung

(i) f ist nicht stetig im Punkt $x = 0$, denn für $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ gilt $lim_{n\to\infty}\frac{cos\frac{1}{x_n}}{x_n^2} = lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2} = lim_{n\to\infty}2n\pi = \infty$.
(ii) Das uneigentliche Integral existiert nach dem Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale wegen $\mid \frac{cos\frac{1}{x}}{x^2} \mid \leq \mid \frac{1}{x^2} \mid$.
(iii) Die Substitution $u = \frac{1}{x}$ liefert $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, also $dx = -x^2du$.
Es folgt $\int \frac{cos\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\int cosu\,du = -sinu = -sin\frac{1}{x} + c$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}$.
(i) Zeigen Sie, daß die Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt .
(ii) Für welche x konvergiert die Potenzreihe ?
(iii) Bestimmen Sie die Grenzfunktion der Potenzreihe.
Lösung
(i) Der Koeffizient a_n der Potenzreihe ist 0 für ungerades n und 1 für gerades n.
Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, also $r = 1$.
(ii) Die Potenzreihe konvergiert für $x \in (0,2)$ und divergiert für $x \notin [0,2]$. Dies folgt aus (i). Zu betrachten bleiben die Randpunkte.
Sie divergiert für $x = 0, x = 2$, da die Summanden in diesen Fällen nicht gegen 0 konvergieren.
(iii) Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}((x-1)^2)^n$, und nach der Formel für die geometrische Reihe erhält man die Grenzfunktion $\frac{1}{1-(x-1)^2}$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x+y & falls \quad x = 0 \; oder \; y = 0 \\ 1 & \quad\quad\; sonst \end{cases}$$

Man zeige:
(i) An der Stelle $(0,0)$ ist f nicht stetig.
Hinweis: Man betrachte die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.
(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existieren.
(iii) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0)$ existiert nicht.
Lösung
(i) Es gilt $f(0,0) = 0$ und $lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = lim_{n\to\infty}\; 1 = 1 \neq f(0,0)$. Damit folgt die Behauptung.
(ii) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$ und
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$.
(iii) Es gilt $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-0}{h}$,
aber dieser Grenzwert existiert nicht.