Modulprüfung zur Analysis I

Lösungen

Weiterbildung für Lehrer an der FU

Dozent: V.Schulze Datum: 30.6.2016 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

(i) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$?

(ii) Man zeige, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ konvergiert
und bestimme den Grenzwert.

Lösung

(i) Die Reihe konvergiert nicht, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ eine Minorante ist, die nach Vorlesung divergiert.

(ii) Die Reihe konvergiert; zum Beweis kann das Quotientenkriterim oder das Wurzelkriterium oder das Leibniz-Kriterium verwendet werden.
Sie konvergiert aber auch, da es sich um eine geometrische Reihe handelt für $q = \frac{-1}{3}$ mit $|q| < 1$.
Für den Grenzwert der geometrischen Reihe gilt nach Vorlesung $\frac{1}{1-q} = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 2

(i) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^2}(x-1)^n$.

(ii) Für welche x konvergiert die Potenzreihe aus (i) ?

Lösung

(i) Für den Konvergenzradius gilt $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n n^2}}}$.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$.
Man beachte, daß die Grenzwerte einzeln gebildet werden dürfen, sofern sie existieren.
Also ist $r = 3$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3}{2^{\frac{1}{1-x}}} & falls \quad x < 1 \\ \\ x^2 - 1 & falls \quad 1 \leq x \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, daßf stetig ist ?
(ii) Ist f gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$?
Ist f gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$?

Lösung

(i) Für $x \neq 1$ ist f stetig, da sich f aus bekannten stetigen Funktionen zusammensetzt.
Betrachte den Fall $x = 1$
Für den linksseitigen Grenzwert gilt
$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3}{2^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{3}{\lim_{x\to 1} 2^{\frac{1}{1-x}}} = 0.$
Man beachte dabei $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \infty$.
Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt
$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0.$
Die rechts- und linksseitigen Genzwerte sind gleich und auch gleich $f(1)$, also ist f im Punkt $x = 1$ stetig.
(ii) Da f nach (i) stetig ist auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, 0]$,
ist f nach Vorlesung auch gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$.
Auf $[0, \infty)$ ist f nicht gleichmäßig stetig.
Annahme: f ist auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle x_0 und $x \in [0, \infty)$ gilt:
$\mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid = \mid x^2 - x_0^2 \mid = \mid (x - x_0)(x + x_0) \mid < \epsilon.$
Für $x_0 = \frac{2\epsilon}{\delta}$ und $x = x_0 + \frac{\delta}{2}$ ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe 4

(i) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+1}{2x^3+x^2}$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+sinx}{2x^3+x^2}$.
(ii) Die Teilmenge M von $\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$M := \{\frac{1}{n^2} + (-1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Besitzt M ein Supremum?
Besitzt M ein Maximum?
Besitzt M ein Infimum?
Besitzt M ein Minimum?
Ist 1 Häufungspunkt von M?

Lösung

(i) Es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+1}{2x^3+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$, da in der Darstellung links die Grenzwerte für die einzelnen Summen und für den Zähler und Nenner jeweils existieren und damit einzeln gebildet werden dürfen.
Analog ergibt sich $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+sinx}{2x^3+x^2} = \frac{1}{2}$, da $\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{x^3} = 0$. Die letzte Aussage ergibt sich, weil der *sin* beschräkt ist und der Nenner gegen unendlich geht.
(ii) M besitzt das Supremum und das Maximum 2, da 2 in M liegt und kein Element aus M größer als 2 ist.
M besitzt das Infimum -1; -1 ist aber kein Minimum, da $-1 \notin M := \{\frac{1}{n^2} + (-1)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
1 ist Häufungspunkt von M , da für jedes $\epsilon > 0$ in $U_\epsilon(1)$ unendlich viele Elemente von M liegen (wähle $m = 2$ und $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$).