§ 4 (Weitere) Algebraisierung der dreidimensionalen affinen Geometrie[1]

Hinweis: Mit etwas abgeänderten Axiomen und Argumenten lassen sich analog zu folgenden Betrachtungen die affinen Räume beliebiger "Dimension" $d > 3$ algebraisieren. Dasselbe gilt für desarguessche affine Ebenen. Wir beschränken uns hier auf 3-dim affine Räume.

M

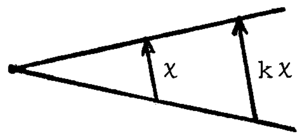
Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass die Punkte aus $\mathcal{P}$ nach Auswahl eines Punktes N durch Ortsvektoren beschrieben werden können. Die Vektoren sind dabei die Elemente der abelschen Gruppe $\mathcal{T}$, die wir jetzt additiv (also mit "+" als Verknüpfungszeichen) schreiben.
Nun wollen wir $\mathcal{T}$ zu einem Vektorraum machen. Dazu müssen wir zunächst einen Skalarbereich einführen. Wie ist ein Skalar sinnvoll zu definieren? In der Schulgeometrie wird das k-fache eines Vektors x (mit $k \in \mathbb{R} - \{0\}$) meist als ein Vektor kx definiert, dessen Pfeile zu denen von x parallel sind (s. Figur 38), $|k|$-fache Länge haben und gleiche (im Fall $k > 0$) bzw. entgegengesetzte (für $k < 0$) Orientierung.
Der Übergang von x zu kx kann auch als Wirkung einer Streckung $\hat{k}$ mit Streckfaktor k aufgefaßt werden.
Im allgemeinen Fall ist nicht zu erwarten, daß als Skalare reelle Zahlen gewählt werden können (z.B. bei endlichen Räumen). Außerdem soll der Begriff der "Länge" eines Vektors noch vermieden werden.
Bei den Anforderungen an die Multiplikation mit einem Skalar k beschränken wir uns zunächst darauf, dass
- jeder "Vektor" $x \in \mathcal{T}$ "parallel" zum "Vektor" kx ist (s. Definition 4.1a), und dass die Regel
- $k(x + y) = kx + ky$ für $x, y \in \mathcal{T}$

erfüllt ist.
Eine Abbildung $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ mit $x \longmapsto kx$, die diesen Bedingungen genügt, werden wir einen "Multiplikator" nennen (s. Definition 4.1b).
Es wird sich zeigen, dass diese Eigenschaften für unsere Zwecke ausreichen und wir aus den Multiplikatoren den Skalarbereich bilden können.

Um Multiplikatoren zu gewinnen, untersuchen wir - motiviert durch die Verhältnisse in der Zeichebene - die Wirkung von zentrischen Streckungen auf Ortsvektoren bzw. Translationen.

Tatsächlich werden wir sehen, daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen
- der Multiplikation von Vektoren mit einem Skalar $p \longmapsto k \cdot p$
- der Wirkung eines Multiplikators von $\mathcal{T}$ $p \longmapsto k(p)$
- der Wirkung einer Streckung auf die Punkte $P \longmapsto \hat{k}(P)$
  bzw. auf die Ortsvektoren $p \longmapsto \hat{k}^*(p)$

M



Figur 38

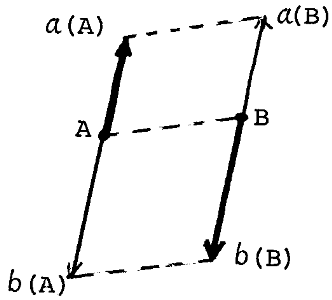
(4.1) Definition

(a) Zwei *Vektoren* $a, b \in \mathcal{T}$ heißen *parallel*, in Zeichen $a \parallel b$, wenn $a = o := \mathrm{id}_P$ oder $b = o$ oder $Aa(A) \parallel Bb(B)$ für ein (und damit nach (3.4) für jedes) Punktepaar (A,B) gilt,

1) Dieser Paragraph kann wegen seines Schwierigkeitsgrades notfalls übergangen werden; dann muß aber später an einigen Stellen $A \cong AG(3,K)$ und K (Schief-)Körper für den betrachteten affinen Raum A vorausgesetzt werden.

also zugehörige Pfeile auf parallelen Geraden liegen (s. Figur 39).

(Achtung: Wegen der Nullabbildung ist $\parallel$ nicht transitiv und damit keine Äquivalenzrelation.)



Figur 39

(b) Ein *Multiplikator* (spurerhaltender Endomorphismus) von T ist ein Homomorphismus $k : T \longrightarrow T$ (also Abbbildung mit $k(a+b) = ka + kb$) mit der zusätzlichen Eigenschaft $k(a) \parallel a$ für alle $a \in T$. Statt $k(a)$ schreiben wir auch ka.

(4.2) Triviale Beispiele von Multiplikatoren

(i) Die Abbildung $0 : T \longrightarrow T$ mit $x \longmapsto o\,(= \mathrm{id}_P)$ ist ein Multiplikator ("*Nullmultiplikator*").

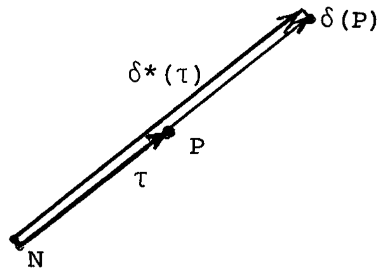
(ii) Die Abbildung $1 : T \longrightarrow T$ mit $x \longmapsto x$ (also id_T) ist ein Multiplikator ("*Einsmultiplikator*").

Nun betrachten wir, wie angekündigt, auf welche Weise eine zentrische Streckung auf Ortsvektoren wirkt. Sei also $\delta : P \longrightarrow P$ eine Dehnung mit Zentrum N. Wir untersuchen $\delta^* : T \longrightarrow T$ mit $\tau_{NP} \longmapsto \tau_{N\delta(P)}$ (Figur 40). Es gilt:

$$\tau_{N\delta(P)}(N) \underset{\text{Def.}}{=} \delta(P) = \delta\circ\tau_{NP}(N) = \delta\circ\tau_{NP}\circ\delta^{-1}(N)$$

(Die letzte Umformung wurde vorgenommen, da $\delta\circ\tau_{NP}$ i.a. keine Translation ist).
Da die beiden Translationen $\tau_{N\delta(P)}$ und $\delta\circ\tau_{NP}\circ\delta^{-1}$ den Punkt N auf den gleichen Punkt abbilden, folgt

$$\delta^*(\tau_{NP}) = \tau_{N\delta(P)} = \delta\circ\tau_{NP}\circ\delta^{-1} .$$



Figur 40

(4.3) Hilfssatz (Zentrische Streckungen als Multiplikatoren)

(i) Ist δ zentrische Streckung mit Zentrum N, so gilt für die von δ auf den Ortsvektoren induzierte Abbildung δ^* die Gleichung $\delta^*(a) = \delta\circ a\circ\delta^{-1}$.

(ii) Für jede zentrische Streckung δ (mit beliebigem Zentrum) ist $\delta^* : T \longrightarrow T$ mit $a \longmapsto \delta\circ a\circ\delta^{-1}$ ein Multiplikator von T.
(Spezialfall: Für $\delta = \mathrm{id}_P$, ist δ^* der Einsmultiplikator.)

Beweis: (i) s.o.

(ii) Sei P Zentrum von δ. Dann gilt

$$\delta^*(a+b) = \delta\circ a\circ b\circ\delta^{-1} = \delta\circ a\circ\delta^{-1}\circ\delta\circ b\circ\delta^{-1} = \delta^*(a)+\delta^*(b)$$

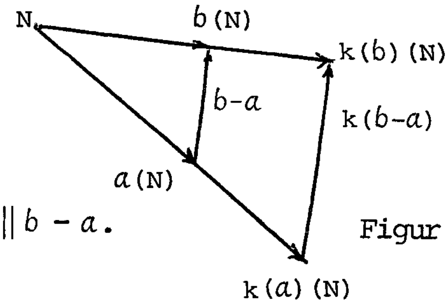
und $\delta^*(\tau_{PQ}) \parallel \tau_{PQ}$ wegen $P\delta^*(\tau_{PQ})(P) = P\delta\circ\tau_{PQ}\circ\delta^{-1}(P) = P\delta(Q) = PQ = P\tau_{PQ}(P)$ im Falle $P \neq Q$ bzw. $\tau_{PQ} = o$ für $P = Q$. □

Nun zeigen wir, dass wir in (4.2) und (4.3) schon alle Multiplikatoren aufgeführt haben.

(4.4) Hilfssatz a) (Eindeutigkeit der Multiplikatoren)

Ein Multiplikator k ist durch einen Vektor $a \neq o$ und seinen Bildvektor $k(a)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es sei b ein nicht zu a paralleler Vektor; insbesondere gilt $b(N) \notin Na(N)$. Da k Multiplikator ist, folgt $k(b)-k(a) = k(b-a) \parallel b-a$.



Figur 41

1. Fall $k(a) = o$. Dann folgt $k(b) \parallel (b-a)$ sowie $k(b) \parallel b$.
Wegen $b \nparallel b-a$ für $b \neq o$ folgt $k(b) = o$. Für einen zu a parallelen Vektor c ist wegen $k(b) = o$ dann analog $k(c) = o$. Also ist k in diesem Fall der Nullmultiplikator.

2. Fall $k(a) \neq o$. Wegen $x \parallel y \Leftrightarrow Ax(A) \parallel By(B)$ (für $A,B \in P$ und $x,y \in T\setminus\{O\}$) ergibt sich entweder $k(b) = k(a)$ (was nur für $k(a) = o$ möglich wäre) oder aber

$$\underbrace{a(N)}_{A}\ \underbrace{(b-a)}_{x}\ \underbrace{(a(N))}_{A} \parallel \underbrace{k(a)(N)}_{B}\ \underbrace{(k(b)-k(a))}_{y}\ \underbrace{(k(a)(N))}_{B}$$

und daraus als erste $k(b)$ festlegende Bedingung
$a(N)b(N) \parallel k(a)(N)k(b)(N)$. Wäre $k(b) = o$, so ergäbe sich $k(a) = o$ wie im 1. Fall (mit b statt a und a statt b). Also folgt $k(b) \neq o$. Wegen $k(b) \parallel b$ gilt dann $Nk(b)(N) = Nb(N)$; daher ist $k(b)(N)$ und und damit $k(b)$ eindeutig bestimmt (vgl. Figur 41). Für einen Vektor $c \neq o$ mit $c \parallel a$ findet man $k(c)$ ebenso, indem man jetzt benutzt, dass $c \nparallel b$ ist. □

b) (Existenz und Beschreibung von Multiplikatoren)

Sind $a, b \neq o$ parallele Vektoren mit $a(N) = A$, $b(N) = B$, und ist δ die zentrische Streckung mit $\delta(N) = N$ und $\delta(A) = B$, so ist δ^* der (eindeutig bestimmte) Multiplikator, der a auf b abbildet.

c) Zusammenfassung: Im Falle der Existenz aller möglichen Streckungen gibt es zu je zwei parallelen Vektoren $a \neq o$ und b genau einen Multiplikator, der a auf b abbildet.

Beweis:

(b) Sei zu gegebenen a, b die Abbildung δ wie angegeben gewählt. Nach (4.3)(ii) ist δ^* Multiplikator. Wir betrachten die Wirkung von $\delta^*(a)$ auf den Nullpunkt N: $\delta^*(a)(N) = \delta \circ a \circ \delta^{-1}(N) = \delta(a(N)) = \delta(A) = B = b(N)$. Da $\delta^*(a)$ und b Translationen sind, folgt sofort $\delta^*(a) = b$.

(c) Nach (4.4)(a) gibt es höchstens einen Multiplikator der $a \neq o$ auf b abbildet. Ist $b \neq o$, so kann $k = \delta^*$ gemäß (b) gewählt werden, da a, b parallel sind; ist $b = o$, so setzt man $k = 0$ (vgl. (4.2)(i)). □

(4.5) Definition und Anmerkung

(a) Wir definieren nun

$K := \{k \mid k \text{ Multiplikator von } T\}$.

(b) Man beachte, dass nach (4.4) folgt

$$\boxed{K = \{\delta^* \mid \delta \text{ Streckung mit Zentrum } N\} \cup \{0\}}$$

M Nachdem wir die "Skalarenmenge" definiert haben, wollen wir ihr nun eine algebraische Struktur aufprägen: Beachten wir, dass später das Distributivgesetz $(k_1 + k_2)x = k_1 x + k_2 x$ und das Assoziativgesetz $(k_1 k_2)x = k_1(k_2 x)$ (für $x \in T, k_1, k_2 \in K$) gelten sollen, so wird folgende Definition nahegelegt: M

(4.6) Definition (Verknüpfungen auf K)

Zu $k_1, k_2 \in K$ definieren wir $k_1 + k_2$ und $k_1 \cdot k_2$ durch

$(k_1 + k_2)(x) := k_1(x) + k_2(x)$ für alle $x \in T$ und

$(k_1 \cdot k_2)(x) := k_1(k_2(x))$ für alle $x \in T$.

Anmerkung: Diese beiden Verknüpfungen sind die üblicherweise auf der Menge der Endomorphismen einer (abelschen) Gruppe betrachtete Addition und Multiplikation. Für jede abelsche Gruppe bildet diese Menge mit den beschriebenen Verknüpfungen dann einen Ring. Hier betrachten wir eine Teilmenge. Für diese gilt sogar:

(4.7) Satz

$(K,+,\cdot)$ ist ein Schiefkörper

d.h. $(K,+)$ und $(K \setminus \{0\},\cdot)$ sind Gruppen, $(K,+)$ ist kommutativ, und es gelten die Distributivgesetze.

Beweisskizze

(i) *Abgeschlossenheit* von K bzgl. + und $\cdot$:
Dass mit k_1 und k_2 auch $k_1 + k_2$ und $k_1 \cdot k_2$ Endomorphismen sind, gilt für jede abelsche Gruppe (Übung!). Zu zeigen bleibt also:
$(k_1 + k_2)(\chi) = k_1(\chi) + k_2(\chi) \parallel \chi$ und
$(k_1 \cdot k_2)(\chi) = k_1(k_2(\chi)) \parallel \chi$ für alle $\chi \in T$
Für $k_1 = 0$ oder $k_2 = 0$ oder $x = o$ ist das klar. Seien $k_1 \neq 0 \neq k_2$ und $x \neq o$!

Dann ist zunächst $k_i(\chi) \neq o$ (- wegen 4.5.b ist $k_i = \delta_i^*$ und $\delta_i^*(\chi) = \delta_i \circ \chi \circ \delta_i^{-1} \neq o$), ferner $k_2(\chi) \parallel \chi$ und $k_1(k_2(\chi)) \parallel k_2(\chi)$. Im Bereich der Vektoren ungleich o ist „$\parallel$" transitiv, also $k_1(k_2(\chi)) \parallel \chi$ für alle $\chi \in T$.

Für $A \in P$ und $B = k_1(\chi)(A)$ folgt wegen $\chi \parallel k_1(\chi)$ und $\chi \parallel k_2(\chi)$ sofort $Ak_1(\chi)(A) = A\chi(A) \parallel Bk_2(\chi)(B) = k_1(\chi)(A)(k_2(\chi) + k_1(\chi))(A)$; der Punkt $k_1(\chi)(A)$ liegt auf der ersten und letzten Parallelen; also sind $A, \chi(A)$ und $(k_1 + k_2)(\chi)(A)$ kollinear, womit $(k_1 + k_2)(\chi) \parallel \chi$ gezeigt ist.

(ii) Die Assoziativität und Kommutativität von $(K,+)$ folgt leicht aus derjenigen von T. Der Nullmultiplikator ist neutrales Element, und zu $k \in K$ ist $-k : \chi \mapsto -k(\chi)$ (Inverse der Translation $k(\chi)$) der zu k inverse Multiplikator. Also ist $(K,+)$ eine kommutative Gruppe.

(iii) Durch die Vorschrift $\delta \mapsto \delta^*$ ist eine Abbildung von der Gruppe (!) $(\mathcal{D}_N,\circ)$ der Streckungen mit Zentrum N auf $(K \setminus \{0\},\cdot)$ definiert.
Diese ist auch injektiv: $\delta_1^* = \delta_2^* \Rightarrow (\delta_1 \circ a \circ \delta_1^{-1})(N) = (\delta_2 \circ a \circ \delta_2^{-1})(N)$ für mindestens ein $a \neq o \Rightarrow \delta_1(a(N)) = \delta_2(a(N))$ (mit $a(N) \neq N$) $\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$.
Ferner ist $\delta \mapsto \delta^*$ mit den beiden Verknüpfungen "$\circ$" auf D_N und "$\cdot$" auf $K \setminus 0$ verträglich:

$(\delta_1 \circ \delta_2)^*(\chi) = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \chi \circ (\delta_1 \circ \delta_2)^{-1} = \delta_1^* \cdot \delta_2^*(\chi)$ für alle $\chi \in T$ und $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{D}_N$. (Insbesondere gilt $(\delta_1^*)^{-1} = (\delta_1^{-1})^*$). Daher ist $(K \setminus \{0\},\cdot)$ ebenfalls eine Gruppe.

(iv) Schließlich gelten die Distributivgesetze (Übung!).

□

(4.8) Anmerkungen und Beispiel

(a) Wir halten fest, daß $(K \setminus \{0\}, \cdot) \cong (\mathcal{D}_N, \circ)$ gilt, wobei $\mathcal{D}_N$ die Menge der Streckungen mit Zentrum N bezeichnet.

(b) Im allgemeinen ist $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ nicht kommutativ. Dies folgt aus folgenden Beispielen, bei denen man von echten Schiefkörpern ausgeht (s. (c) und (d)).

(c) Sei $(K,+,\cdot)$ ein Schiefkörper, der kein Körper ist. Dann definieren wir über K die *3-dimensionale affine Geometrie* AG(3,K) durch

$\mathcal{P}$:= Menge der Vektoren des K-Links-Vektorraums K^3

$\mathcal{G}$:= Menge der 1-dim affinen Unterräume von K^3

$\mathcal{E}$:= Menge der 2-dim affinen Unterräume von K^3

Inzidenzen jeweils $\in$

(Zu den Vektorräumen über Schiefkörpern siehe z.B. H. Lüneburg, Einführung in die Algebra, Berlin, Heidelberg, New York 1973. Beachten Sie, daß dort der Begriff "Körper" im Sinne von "Schiefkörper" verwendet wird). Statt den Links-Vektorraum hätten wir auch den Rechts-Vektorraum K^3 zur Konstruktion nehmen können. Ohne Beweis vermerken wir, dass auch diese Geometrien AG(3,K) die Axiome ($\mathcal{I}$1) - ($\mathcal{I}$6) und (EP) erfüllen.

Aufgabe 26*

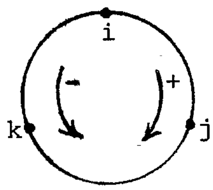
Zeigen Sie, daß für AG(3,S) mit beliebigem Schiefkörper S gilt: Der in 4.5 / 4.6 definierte Schiefkörper K ist isomorph zu S.

(d)* Um Anmerkung (b) zu zeigen, reicht also nach c) und Aufgabe 26 die Angabe eines echten Schiefkörpers aus. Wir beschreiben hier den sogenannten *reellen Quaternionenschiefkörper* $\mathbb{H}$:

$$(\mathbb{H},+) := (\mathbb{R}^4,+)$$

$$(a,b,c,d)\cdot(a',b',c',d') := (aa'-bb'-cc'-dd',\ ab'+ba'+cd'-dc',$$
$$ac'-bd'+ca'+db',\ ad'+bc'-cb'+da').$$

Setzt man $1=(1,0,0,0)$, $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$, $k=(0,0,0,1)$, so lässt sich die Mulitplikation von $a1+bi+cj+dk$ mit $a'1+b'i+c'j+d'k$ zurückführen auf die Multiplikation von $1,i,j,k$ miteinander. Für diese gilt u.a. $i^2=j^2=k^2=-1$ und $1\cdot x=x$; die weiteren Produkte entnimmt man folgendem Merkschema (Figur 42):



Figur 42

, z.B. $i\cdot j=k$

$j\cdot i=-k$

$j\cdot k=i$

$\mathbb{H}$ kann als Erweiterung von $\mathbb{C}$ angesehen werden (i,j,k als 3 "imaginäre" Einheiten).

(e) Beachten Sie, dass nach einem Satz von Wedderburn jeder endliche Schiefkörper schon Körper ist; (s.z.B.: K. Meyberg, Algebra 2, München, Wien 1976 oder H. Lenz: Grundlagen der Elementarmathematik.

(4.9) Satz

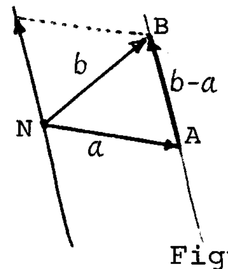
Definiert man auf T durch $k \cdot a := k(a)$ für $k \in K$, $a \in T$ eine S-Multiplikation $\underset{K}{\cdot}$, so ist $(T,+,\underset{K}{\cdot})$ ein Linksvektorraum über K.

Beweis:

Dass $(T,+)$ kommutative Gruppe ist, wurde schon gezeigt. Definitionsgemäß gilt $k(a+b) = ka + kb$ (k als Endomorphismus), $(k_1 + k_2) \cdot a = k_1 a + k_2 a$ (Definition von „+" auf K), ferner $(k_1 \cdot k_2) \cdot a = k_1 \; (k_2 a)$ (Definition von „·" auf K) und $1a = a$ (Definition des Einsmultiplikators).

□

Aufgabe 27: Zeigen Sie, dass in einem 3-dim affinen Raum



Figur 43

(a) die Gerade durch die zwei Punkte $A = a(N)$ und $B = b(N)$ gegeben ist durch die Ortsvektorenmenge $a + K(b - a)$, (Hinweis: Beachten Sie Hilfssatz (4.4) !)

(b) die Ebene durch die drei nicht-kollinearen Punkte $A = a(N)$, $B = b(N)$ und $C = c(N)$ durch

$$a + K(b - a) + K(c - a)$$

(c) und der Raum durch $Kp + Kq + Kr$ für geeignete $p, q, r \in T$.

(4.10) Folgerung und Definition

(a) Ist (P,G,E) ein Modell des Axiomensystems $(I1) - (I6)$ und (EP) dann existiert ein Schiefkörper K derart, dass (P,G,E) zu AG(3,K) isomorph ist.

(b) Dabei nennen wir (P,G,E) und (P',G',E') *isomorph*, falls es eine Bijektion $j : P \longrightarrow P'$ gibt, die auch G auf G' und E auf E' bijektiv abbildet. (j heißt *Isomorphismus* oder inzidenzerhaltende Bijektion).

Lösungsskizze zu Aufgabe 27

ad a) Der Vektor mit Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ergibt sich infolge der Additionsregel von Translationen ($\rightarrow$ Vektoraddition) als $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$. Zu jedem Punkt der zu AB parallelen Geraden h durch N lässt sich aus dem Punkt mit Ortsvektor $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ jeder andere Punkt von h durch eine zentrische Streckung ($\rightarrow$ S-Multiplikation) erreichen. Also gehören zu h die Ortsvektoren $(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})K$. Wendet man nun auf h die Translation $\mathfrak{a}$ an, so erhält man für die Ortsvektoren der Geraden AB die Vektoren aus $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})K$.
Lösungsidee für (b): Für die Ebene parallel zur gegebenen Ebene sind nicht nur $(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})$, sondern auch $(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})$ und alle Linearkombinationen daraus zu berücksichtigen. Wieder führt die Translation $\mathfrak{a}$ zum Ergebnis.
Lösungsidee für (c):
Eine Ebene durch N hat laut (b) die Form $K\mathfrak{p}+K\mathfrak{q}$. Und jede dazu parallele Ebene erreicht man wieder durch die Translationen aus $\mathfrak{r}K$ z.B. mit $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$.

M <u>Anmerkung:</u> Es ist schon erstaunlich, dass die relativ schwach erscheinenden Axiome $(I1)$ - $(I6)$ und (EP) erzwingen, dass nur die affinen Geometrien AG(3,K) als

M Modelle in Frage kommen.

<u>Beweisskizze zu (4.10)(a):</u>

Aus Satz 4.9 und Aufgabe 27 folgt, daß es einen Vektorraumisomorphismus ℓ von T auf K^3 gibt, wobei K wie in 4.5/6 definiert wird. Als j wählt man (nach Festlegen eines Nullpunktes $N \in P$) die Komposition von ℓ mit der Zuordnung der Punkte zu ihren Ortsvektoren. Die weiteren Eigenschaften ergeben sich wieder aus Aufgabe 27.

□