M Anmerkung: Wir sind also noch weit von einem kategorischen Axiomensystem (als einem, zu dem es bis auf "Isomorphie" nur
M ein Modell gibt,) entfernt.

(1.15) Vereinbarung: Im folgenden werden wir (falls nicht anders erwähnt) stets Inzidenzräume betrachten, die den Axiomen $I1$ bis $I6$ genügen; dabei fassen wir Geraden und Ebenen als Punktmengen und die Inzidenzrelationen als die Enthaltenseinsrelation "$\in$" auf.

§ 2 Parallelität

A) Affine Geometrie: Definition und erste Eigenschaften der Parallelität

M Zunächst wollen wir definieren, was wir unter Parallelität von Geraden bzw. Ebenen verstehen. Dabei ist etwas Vorsicht geboten, da die entsprechenden Definitionen von der Dimension des betrachteten Raumes abhängen können. In der ebenen affinen Geometrie z.B. heißen Geraden parallel, falls sie gleich oder disjunkt sind. Im Höherdimensionalen könnte eine solche Definition jedoch nicht sinnvoll aufrechterhalten werden: Es existieren auch "windschiefe" Geraden dieser Eigenschaft. Oft wird "Parallelität" daher als nicht weiter definierte Grundrelation eingeführt. Wir
M jedoch vereinbaren im Hinblick auf den 3-dim Fall (für einen beliebigen Inzidenzraum mit $I5$):

(2.1) Definition (Parallelität)

(a) Zwei *Geraden* heißen *parallel*, wenn sie entweder gleich sind oder in einer Ebene liegen und disjunkt sind (d.h. keinen Punkt gemeinsam haben).

(b) Zwei *Ebenen* heißen *parallel*, wenn sie entweder gleich oder disjunkt sind.

(c) Eine *Gerade* g und eine *Ebene* E heißen *parallel*, wenn entweder $g \subseteq E$ oder $g \cap E = \emptyset$ gilt.

(d) Für die Parallelität verwenden wir das Zeichen "$\|$" z,B. $g \| h$, $E \| F$, $g \| E$, für die Negation jeweils "$\nparallel$" (nicht-parallel).

(2.2) Beispiele

(a) Parallelität von Ebenen in AG(3,K)

> Gegeben seien $E_i = p_i + U_i$ mit 2-dim Unterraum U_i (für i=1,2).
>
> Dann gilt: $E_1 \| E_2 \Leftrightarrow U_1 = U_2$

Beweis-Skizze: Laut Definition ist $E_1 \| E_2$ äquivalent zu

$(*)\ (p_1 + U_1 = p_2 + U_2) \vee (p_1 + U_1 \cap p_2 + U_2 = \emptyset)$. Beh.: $(*) \Leftrightarrow U_1 = U_2$.

Für $U_1 = U_2$ folgt die Aussage (*) aus Eigenschaften von Nebenklassen. Zum Nachweis der Umkehrung sei $U_1 \neq U_2$ gesetzt. Dann gilt $U_1 + U_2 = K^3$ (Dimensions-Argument!) und damit $p_2 - p_1 \in U_1 + U_2$. Dies zeigt $p_1 + U_1 \cap p_2 + U_2 \neq \emptyset$, nach Voraussetzung also $p_1 + U_1 = p_2 + U_2$, d.h. $p_1 + o \in p_2 + U_2$. Mit $p_1 - p_2 \in U_2$ erhält man $U_1 = p_2 - p_1 + U_2 = U_2$, einen Widerspruch.

□

Aufgabe 8

Untersuchen Sie in AG(3,K) analog zu (2.2)(a) die Parallelität zwischen Geraden und diejenige zwischen Geraden und Ebenen.

(2.2)(b)*

Auch im Kleinschen Modell H der hyperbolischen Ebene (s. 1.4.g) kann man Parallelität von Geraden definieren:

$$g \| h \ :\Leftrightarrow g = h \vee g \cap h = \emptyset.$$

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es dann unendlich viele Parallelen von g durch P. (s. Figur 9).

(c)* PG(K^4)

Sei K Körper. Wir betrachten die projektive Geometrie des K-Vektorraums K^4 (vgl. Aufgabe 7*): $\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E}$ seien die Mengen der 1-dim bzw. 2-dim bzw. 3-dim Unterräume von K^4; Inzidenzrelation sei jeweils die Enthaltenseinsrelation "$\subseteq$".
Mit Hilfe von Kenntnissen aus der Linearen Algebra zeigt man :
PG(K^4) ist ein Modell des Axiomensystems (I 1)-(I 6).

Dass es in diesem Inzidenzraum keine verschiedenen parallelen Geraden oder Ebenen gibt, ist Gegenstand der folgenden Aufgabe.

<u>Aufgabe 9*</u>

Zeigen Sie, daß sich in PG(K^4) je zwei verschiedene Ebenen in einer Geraden und je zwei verschiedene in einer Ebene gelegene Geraden in einem Punkt schneiden.

Im Folgenden fordern wir meist:

(2.3) <u>Axiom</u> *(EP) (Euklidisches Parallelenaxiom)*

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $B \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch B, die zu g parallel ist.

<u>Anmerkungen</u>: 1.) Bei Forderung dieses Axioms sind alle sogenannten "Nichteuklidischen Geometrien" ausgeschlossen. Beachten Sie unsere Ausführungen zu diesem Axiom (Axiomenklasse IV) in der Einleitung (Seite 2). Nicht nur die Unabhängigkeit von *(EP)* von den Inzidenzaxiomen, die aus (2.2)(a) und (c) folgt, sondern auch die Unabhängigkeit von den Axiomen der übrigen Klassen war der Inhalt der erwähnten Problematik.

2. Aus allen anderen Axiomen kann man zeigen: Es existiert mindestens eine Parallele; das Problem ist also die Eindeutigkeit.

3.) Die Einschränkung "$B \notin g$" kann fallengelassen werden: g ist die Parallele zu g durch jeden Punkt von g und die Eindeutigkeit folgt aus der Disjunktheit verschiedener paralleler Geraden.

(2.4) <u>Definition</u>

Jeden Inzidenzraum *(P,G,E)*, der die Dimensionsaxiome *(I5)* und *(I6)* sowie das Euklidische Parallelenaxiom *(EP)* erfüllt, nennen wir einen *affinen Raum mit* *(I5)* oder (in Vorwegnahme des Ergebnisses von § 4) einen <u>*3-dim affinen Raum*</u>.

Anmerkung: Man kann affine Räume auch allein mit den Grundbegriffen "Punkt" und "Gerade" definieren.

<u>Beispiele</u> 3-dim affiner Räume : AG(3,K) für jeden Körper K.

<u>Generalvoraussetzung</u>:

Falls nicht anders vermerkt, betrachten wir im Folgenden nur 3-dim affine Räume $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$, also Modelle des Axiomensystems $(\mathcal{I}1)$ bis $(\mathcal{I}6)$ und $(\mathcal{EP})$ mit Punktmenge $\mathcal{P}$, Geradenmenge $\mathcal{G}$ und Ebenenmenge $\mathcal{E}$.

Als erstes untersuchen wir Eigenschaften der (Unter-) Ebenen, also der Elemente von $\mathcal{E}$:

(2.5) <u>Anmerkung</u>:

Definitionsgemäß liegen zwei parallele Geraden in einer Ebene. Ist h die gemäß $(\mathcal{EP})$ existierende Paralle zu g mit $B \in h$, so liegt h im Falle $B \notin g$ in der von B und g "aufgespannten" Ebene. (Im Falle $B \in g$ ist $g = h$, und h liegt in jeder g und damit B enthaltenden Ebene).

Beschränken wir uns bei einer festen Ebene $E \in \mathcal{E}$ auf die Mengen $\mathcal{P}(E) := \{P \in \mathcal{P} | P \in E\}$ und $\mathcal{G}(E) := \{g \in \mathcal{G} | g \subseteq E\}$ so folgt aus (2.5) für die inzidenzgeometrische Struktur von E das Folgende:

(2.6) a) <u>Hilfssatz</u>

Seien E eine Ebene des 3-dim affinen Raumes und $\mathcal{P}' := \mathcal{P}(E)$ sowie $\mathcal{G}' := \mathcal{G}(E)$ wie eben definiert.

Dann folgt:

(1) Durch je zwei verschiedene Punkte aus $\mathcal{P}'$ geht genau eine Gerade aus $\mathcal{G}'$. (Gültigkeit von $(\mathcal{I}1)$ für $(\mathcal{P}',\mathcal{G}')$).

(2) Zu jedem Punkt $P \in \mathcal{P}'$ und jeder nicht durch P gehenden Geraden $g \in \mathcal{G}'$ gibt es genau eine zu g disjunkte Gerade $h \in \mathcal{G}'$ durch P. (Gültigkeit von $(\mathcal{EP})$ für $(\mathcal{P}',\mathcal{G}')$).

(3) Es existieren drei nicht-kollineare Punkte $P,Q,R \in \mathcal{P}'$ (vgl. $\mathcal{I}2$).

b) Definition

Eine Struktur bestehend aus einer Punktmenge $\mathcal{P}'$, einer Geradenmenge $\mathcal{G}'$ und einer Inzidenzrelation zwischen $\mathcal{P}'$ und $\mathcal{G}'$, die den Bedingungen (1),(2) und (3) genügt, heißt *affine Ebene*.

c) Neuformulierung von a):

Jede Ebene eines affinen Raumes mit (*I* 5) bildet eine affine Ebene.

Weitere *Beispiele affiner Ebenen* sind AG(2,K) für beliebige Körper K und die Moulton-Ebene. Ein Minimalmodell ist in (1.4)(b) dargestellt. Beispiele von Ebenen, die nicht affine Ebenen sind: Projektive Ebenen, Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene.

Nun betrachten wir weitere Eigenschaften der Parallelität:

(2.7) Hilfssatz In einem 3-dim affinen Raum gilt:

Die Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

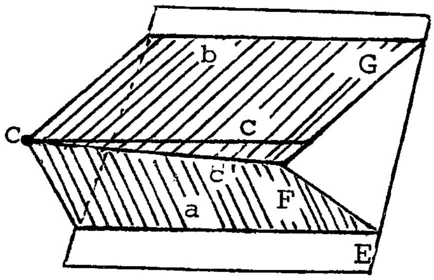
Beweis:*)

Die Relation " $\parallel$ " zwischen Geraden ist offensichtlich (s. Definition) reflexiv und symmetrisch. Wir zeigen die Transitivität. Seien also a,b,c Geraden mit $a \parallel b$ und $b \parallel c$; zu zeigen ist $a \parallel c$.

1. Fall: a,b und c liegen in einer Ebene.

Ist $a = c$, so trivialerweise $a \parallel c$. Wäre $a \cap c = \{P\}$, so gingen durch P die verschiedenen zu b parallelen Geraden a und c, ein Widerspruch zu Axiom (*EP*). Also gilt $a \cap c = \emptyset$.

<u>2. Fall</u>: a,b und c liegen nicht in einer Ebene (s. Figur 13) Dann existiert ein Punkt $C \in c$, der nicht in der von a und b aufgespannten Ebene E liegt.



Figur 13

Die Ebene F durch a und C (s. (*I3*)) schneidet die Ebene G durch b und C in einer Geraden c' (Axiome (*I5*),(*I4*)). Wäre die mit b komplanare[1] Gerade c' nicht parallel zu b, so gäbe es einen Punkt

$P \in b \cap c' = (G \cap E) \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap (E \cap G) = a \cap b$,

ein Widerspruch zu $a \parallel b$, $a \neq b$. Also ist $c' \parallel b$. Analog folgt $c' \parallel a$. Nach Axiom (*EP*) gibt es aber genau eine Parallele durch C zu b. Deswegen gilt $c = c'$ und daher $a \parallel c$. □

M Zur Motivation der folgenden Begriffsbildung, die zunächst wohl überrascht, beachte man, dass sich z.B. gerade verlaufende parallele Eisenbahnschienen am Horizont in einem Punkt zu treffen scheinen. (Diesen Punkt gibt es nicht in Realität, aber z.B. auf einem Foto der Schienen). M

(2.8) <u>Definition</u>

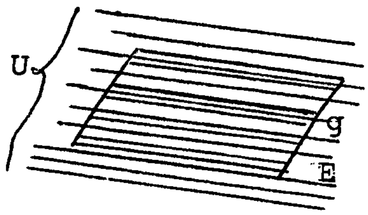
a) Die Äquivalenzklassen von Geraden hinsichtlich der Relation "∥" heißen *uneigentliche Punkte*, (ideale Punkte, Fernpunkte). Ein uneigentlicher Punkt U - so definieren wir - *inzidiert mit einer Geraden* g, wenn $g \in U$ ist, und er *inzidiert mit einer Ebene* E, wenn eine Gerade g aus E zu U gehört (vgl. Figur 14). Die Elemente von *P*,*G*,*E* heißen zur Unterscheidung auch *eigentliche* Punkte, Geraden bzw. Ebenen.

---

1) "komplanar" bedeutet "zusammen in einer Ebene liegend"

M

Wir können hier noch nicht auf die volle Begründung und die Tragweite der Definition eingehen. Nur soviel kann schon gesagt werden: Durch diese Definition brauchen wir für Geraden einer Ebene oft nicht mehr zwischen parallelen und nicht-parallelen Geraden zu unterscheiden:



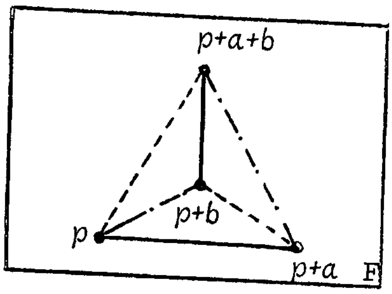
Figur 14

Je zwei verschiedene Geraden einer (so erweiterten) Ebene schneiden sich in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt.

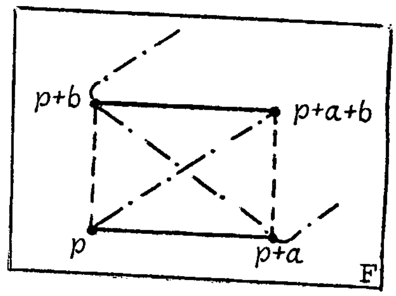
Umgekehrt liegen zwei Geraden mit (eigentlichem oder uneigentlichem) Schnittpunkt in einer Ebene.

Beispiel:*

Wir betrachten eine Ebene F von AG(3,GF(2)). Sie hat eine symbolische Darstellung in der Zeichenebene in Form von Figur 15a (vgl. 1.4.b und Aufgabe 1(i)) (Parallelen mit gleicher Markierung) oder auch in der Form von Figur 15 b (mit dem Versuch, Parallelen parallel zu zeichnen).



Figur 15 a

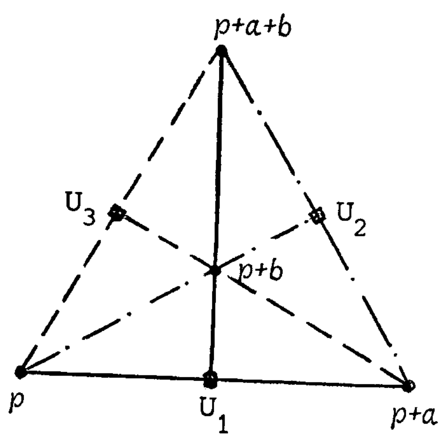


Figur 15 b

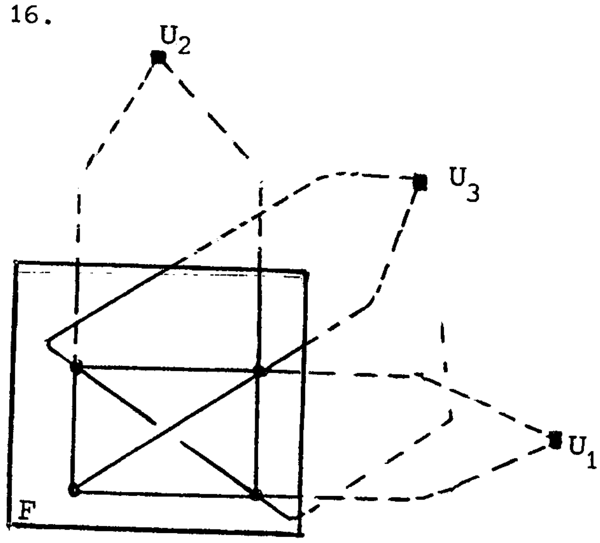
Nehmen wir die mit F inzidierenden uneigentlichen Punkte hinzu, nämlich U_1, U_2, U_3 mit

$$U_1 = \{\{p, p+a\}, \{p+b, p+a+b\}\},$$
$$U_2 = \{\{p, p+b\}, \{p+a, p+a+b\}\},$$
$$U_3 = \{\{p+a, p+b\}, \{p, p+a+b\}\},$$

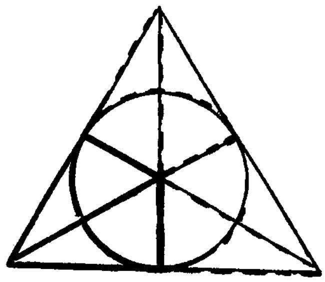
so gelangen wir zu den Figuren 16.



Figur 16 a



Figur 16 b



Figur 17: PG(GF(2)^3)

M

Auch im allgemeinen Fall "fehlt" in einer Ebene F eine die uneigentlichen Punkte verbindende Gerade. Daher definieren wir

(b) Die Menge der uneigentlichen Punkte, die mit einer Ebene inzidieren, nennen wir *uneigentliche Gerade*. Die Menge aller uneigentlichen Punkte heißt *uneigentliche (ideale) Ebene*.
Zwei parallele Geraden (Ebenen) haben einen Schnittpunkt auf der uneigentlichen Ebene.

Aufgabe 10*
Sei E eine affine Ebene. Durch Hinzunahme der entsprechenden uneigentlichen Elemente entsteht $\hat{E}$:
Punkte von $\hat{E}$ sind die eigentlichen und uneigentlichen Punkte von E.
Geraden von $\hat{E}$ sind 1.) die Mengen

$$\{P \mid P \in g\} \cup \{U_g\}$$

für alle Geraden g von E, wobei U_g uneigentlicher Punkt mit $g \in U_g$ sei,
sowie 2.) die Menge $\{U \mid U$ uneigentlicher Punkt von E$\}$.
Zeigen Sie, daß $\hat{E}$ eine projektive Ebene ist. (Zur Definition s. Anmerkung nach Aufgabe 2).

Anmerkung.

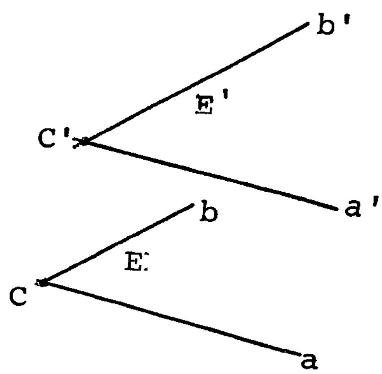
Falls nicht anders vermerkt (wie z.b. in (2.18), §2 C und §5), betrachten wir im Folgenden nur eigentliche Punkte, Geraden und Ebenen

Nun betrachten wir die Parallelität von Ebenen:

(2.9) Hilfssatz*

Seien C,C' Punkte und a,b sowie a',b' je zwei verschiedene Geraden mit $C = a \cap b$, $C' = a' \cap b'$, $a \parallel a'$ und $b \parallel b'$. Dann sind die Ebenen E und E' mit $E \supseteq a \cup b$ und $E' \supseteq a' \cup b'$ parallel.

Beweis:



Figur 18

Existiert ein $P \in E \cap E'$, so enthält sowohl E als auch E' die Parallelen a", b" zu a bzw. b durch P (vgl. Anmerkung (2.5)). Die Geraden a" und b" sind verschieden, da andernfalls $a \parallel b$ folgte, im Widerspruch zu $C \in a \cap b$ und $a \neq b$.

In diesem Falle folgt also $E = E'$; (zwei[1]) sich schneidende oder parallele Geraden liegen ja genau in einer Ebene).

Ist andererseits $E \cap E' = \emptyset$, so gilt $E \parallel E'$ gemäß Definition. □

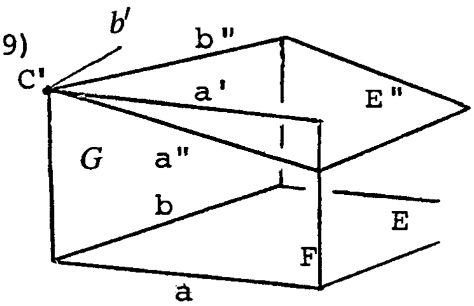
Mit diesem Hilfssatz können wir eine dem Parallelenaxiom entsprechende Aussage für Ebenen herleiten:

(2.10) <u>Hilfssatz</u>

Sei E eine Ebene und C' ein Punkt mit $C' \notin E$. Dann geht durch C' genau eine Ebene E' mit $E' \parallel E$.

<u>Beweis</u>: Nach Axiom (I 3) enthält E drei nicht-kollineare Punkte. Zwei der drei von diesen bestimmten Geraden nennen wir a und b. Nach Axiom (EP) existieren Parallelen a', b' zu a und b durch C'. Die Existenz von E' ergibt sich nun aus Hilfssatz (2.9).

Sei E'' eine weitere Ebene durch C'; ferner seien F bzw. G die Ebenen durch a und C' bzw. durch b und C'. Dann schneidet E'' diese Ebenen jeweils in einer Geraden: $a'' := F \cap E''$ (s. 1.10) und $b'' = G \cap E''$. Wäre $a'' = a'$ und $b'' = b'$, so $E'' = E'$, ein Widerspruch. Sei also o.B.d.A. (s. Fig. 19) $a'' \neq a'$. Da a'' und a in F liegen, existiert nach Axiom (EP) ein gemeinsamer Punkt von a'' und a und damit von E und E''; daher gilt $E \nparallel E''$, w.z.b.w. □



Figur 19

(2.11) <u>Folgerung</u>

Auch die Parallelität von Ebenen ist eine Äquivalenzrelation.

<u>Beweis</u>: Reflexivität und Symmetrie ergeben sich unmittelbar aus der Definition. Seien $E \parallel F$ und $F \parallel G$. Wären E und G

---

[1]) verschiedene

nicht parallel, so gingen durch einen dann existierenden Schnittpunkt zwei zu F parallele Ebenen, ein Widerspruch zu (2.10).

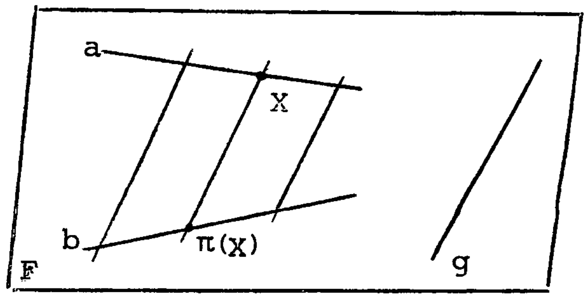
□

B) Parallelprojektionen

Neben den Zentralprojektionen, auf die wir weiter unten eingehen, sind die Parallelprojektionen wichtige Abbildungen bei zeichnerischen Darstellungen (→Darstellende Geometrie) und anderen Anwendungen. Je nach Definitions- und Wertebereich unterscheiden wir verschiedene Parallelprojektionen.

(2.12) Definition

Seien a und b Geraden, die in einer Ebene F liegen; sei ferner g eine weitere Gerade aus F, die weder zu a noch zu b parallel ist. Dann wird die *Parallelprojektion* π *von* a *auf* b *längs* g wie folgt erklärt: Zu jedem Punkt $X \in a$ sei $\pi(X)$ der Schnittpunkt von b mit der Parallelen zu g durch X. (s. Figur 20)



Figur 20

Aufgabe 11

a) Zeigen Sie, dass die in (2.12) definierte Zuordnung eine bijektive Abbildung von a auf b ist. Welche Axiome benutzen Sie dabei?

b) Folgern Sie: In einem (*I*5) und (*EP*) erfüllenden Inzidenzraum gilt:

Je zwei Geraden $g,h \in \mathcal{G}$ sind (als Punktmengen) gleichmächtig (, haben also die gleiche endliche oder unendliche Kardinalzahl).

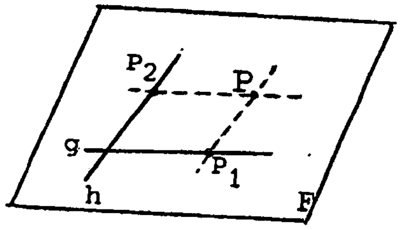
c) Wie groß ist diese Kardinalzahl für AG(n,K) mit $n = 2$ bzw. $n = 3$ und $K = GF(2)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. K beliebig?

Anmerkung: Man kann in naheliegender Weise auch eine Parallelprojektion $\hat{\pi}$ der (ganzen) Ebene F auf b längs g definieren. (Wie ?) Allerdings ist diese keine Bijektion.

Die in (2.12) definierte Abbildung ist dann Einschränkung von $\hat{\pi}$ auf den Definitionsbereich a.

Aufgabe 12

Seien $F \in E$, $g,h \in G$ mit $g,h \subseteq F$ und $g \nparallel h$.
Zeigen Sie: Es gibt eine Bijektion von F auf $g \times h$ (als Punktmengen).
Lösungshinweis: Siehe Figur 21 !
Aus Aufgabe 12 folgt:



Figur 21

(2.13) Hilfssatz

Für jede Ebene $F \in E$ und jede Gerade $g \in G$ gilt $|F| = |g|^2$

Anmerkung: Die Aussagen von Aufgabe 11b und von (2.13) gelten (mit analogem Beweis) auch für jede beliebige affine Ebene.

Wir kommen nun zur *Parallelprojektion von einer Ebene* E *auf eine Ebene* F *längs einer* weder zu E noch zu F parallelen Geraden g: Zu $X \in E$ sei $\pi'(X)$ der Schnittpunkt von F mit der Parallelen zu g durch X. Zu klären ist zunächst, ob überhaupt ein solcher Schnittpunkt stets existiert. Wir zeigen als erstes:

(2.14) Hilfssatz

Eine Gerade g ist zu einer Ebene E parallel genau dann, wenn eine Gerade $h \subseteq E$ existiert mit $g \parallel h$.

Beweis:
Wir behaupten, dass $g \nparallel E$ genau dann gilt, wenn g zu keiner Geraden h von E parallel ist (Kontraposition).

(a) Sei $g \nparallel E$! Definitionsgemäß existiert ein Punkt P mit $g \cap E = \{P\}$. Gäbe es eine Gerade h mit $h \subseteq E$ und $g \parallel h$, so läge nach 2.5 die eindeutige Parallele zu h durch P, also g, in der h und P enthaltenden Ebene, also E, ein Widerspruch.

(b) Umgekehrt sei g zu keiner Geraden von E parallel ! Dann ist insbesondere $g \not\subseteq E$. Es sei $B \in E \setminus g$. Die Ebene F durch B und

g schneidet E in einer Geraden h; wegen $h \subseteq E$ können g und h nicht parallel sein, schneiden sich daher und wegen $g, h \subseteq F$ in einem Punkt $A \in g \cap h \subseteq g \cap E$. Also folgt $g \not\parallel E$. □

(2.15) Folgerungen

a) Wenn eine Gerade g eine Ebene E in genau einem Punkt schneidet, so gilt dasselbe für jede Parallele zu g.

Beweis: Sei $g \cap E = \{P\}$ und $h \parallel g$, $h \neq g$. Die Ebene F mit $g,h \subseteq F$ schneidet E in einer Geraden k. Daraus ergibt sich $h \not\parallel k$ (aus $h \parallel k$ folgte $k \parallel g$ und nach (2.14) damit $g \parallel E$ ↯), wegen $h,k \subseteq F$ und $h \not\parallel k$ gilt $h \cap k \neq \emptyset$, damit $E \cap h \supseteq k \cap h \neq \emptyset$. Aus $h \parallel g \not\parallel E$ folgt nach 2.14: $h \not\subseteq E$. □

b) Damit ist die oben angegebene Parallelprojektion zwischen Ebenen wohldefiniert und bijektiv.

Als weitere Folgerung ergibt sich erneut die Gleichmächtigkeit zweier Ebenen $F,H \in \mathcal{E}$.

Aus (2.14) folgt auch, daß sich *je zwei parallele Ebenen genau in einer uneigentlichen Geraden* (s. 2.8b)) schneiden. (Wie ?)

Schließlich definieren wir noch Parallelprojektionen des Raumes auf eine Ebene:

(2.16) Definition

Sei F eine Ebene und g eine Gerade mit $g \not\parallel F$. Die wie folgt definierte Abbildung $\tilde{\pi} : \mathcal{P} \longrightarrow F$ heißt *Parallelprojektion des Raumes auf die Ebene* F *längs* g:

Jedem Punkt $X \in \mathcal{P}$ wird als Bild $\tilde{\pi}(X)$ der Schnittpunkt der Parallelen zu g durch X mit der Ebene F zugeordnet.

M (Vgl. : Grundriss und Aufriss in der Darstellenden Geometrie)

(Wieder erhält man die Parallelprojektion von einer Ebene E auf die Ebene F durch Einschränkung des Definitionsbereichs von $\tilde{\pi}$ auf E.)

(2.17) Eigenschaften:

$\tilde{\pi}$ ist wohldefiniert (Axiom (EP) und (2.15)!), bildet jede zu g parallele Gerade g" auf einen Punkt und jede andere Gerade auf eine Gerade von F ab. Gilt $g' \| h'$ mit $g' \nparallel g$, so folgt $\tilde{\pi}(g') \| \tilde{\pi}(h')$; (ein evtl. Schnittpunkt liegt auf einer Parallelen zu g, die die g' und h' enthaltende Ebene E in einem g' und h' gemeinsamen Punkt schnitte oder in E liegt; im letzteren Fall gilt: $\tilde{\pi}(g') = \tilde{\pi}(h')$.)

Aufgabe 13: Zeigen Sie $|P| = |g|^3$ für $g \in G$.

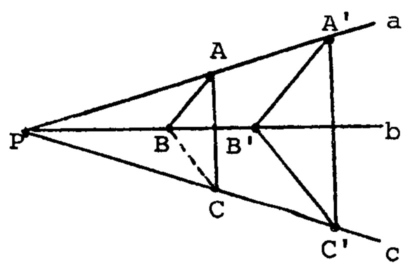
Als weitere Anwendung zeigen wir folgende Ergänzung zu (1.11):

(2.18) Satz ("Gültigkeit des affinen Satzes von Desargues")

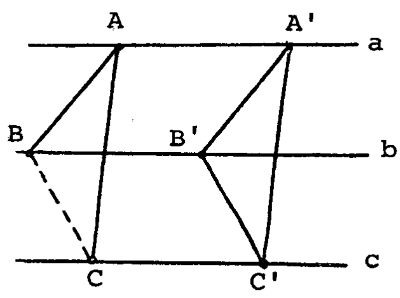
> Für jeden 3-dim affinen Raum gilt der affine Satz von Desargues:
>
> Seien a,b,c drei kopunktale oder parallele Geraden; der gemeinsame eigentliche oder uneigentliche Punkt heiße P. Ferner seien A,B,C und A',B',C' untereinander und von P verschiedene eigentliche Punkte mit $A,A' \in a$, $B,B' \in b$, $C,C' \in c$ und $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$.
>
> Dann ist auch $BC \| B'C'$.

Anmerkung:

Der affine Satz von Desargues mit der zusätzlichen Voraussetzung "P uneigentlich" heißt *"kleiner affiner Satz von Desargues"* (s. Figur 23).



Figur 22
Figur zum affinen Satz von



Figur 23
Figur zum "kleinen" affinen Satz von Desargues

Beweis:

1. (Räumlicher) Fall: a, b, c liegen nicht in einer Ebene.

Die Beweisidee entspricht derjenigen von Hilfssatz (1.11). Die Ebenen ABC und $A'B'C'$ müssen in diesem Fall verschieden sein; nach 2.9 sind sie aber parallel. Die gemeinsame uneigentliche Gerade heiße h. Die parallelen Geraden AB und $A'B'$ bestimmen einen uneigentlichen Punkt, der als Punkt von ABC und $A'B'C'$ auf h liegt[1]. Analoges gilt für die Geraden AC und $A'C'$. Die Geraden BC und $B'C'$ liegen in einer Ebene, besitzen daher einen gemeinsamen Punkt Q, der wegen $ABC \parallel A'B'C'$ nur uneigentlich sein kann. Daher sind auch BC und $B'C'$ parallel.

2. (Ebener) Fall: a, b, c liegen in einer Ebene (s. Figuren 24 und 25).

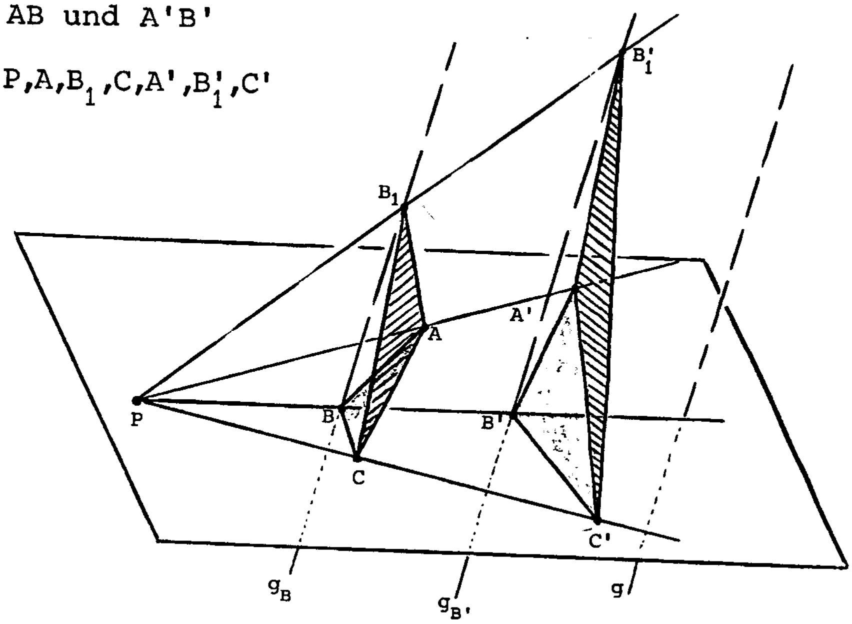
Beweisidee: Die ebene Desargues-Figur ist Grundriss einer räumlichen Desargues-Figur.

Es sei g eine nicht zu E parallele Gerade, und g_X sei die Parallele zu g durch einen beliebigen Punkt $X \in E$.
Wir wählen einen Punkt $B_1 \in g_B \setminus \{B\}$; insbesondere gilt dann $B_1 \notin E$ und (wegen $PB = PB'$) auch $g_{B'} \parallel g_B \subseteq PB'B_1$. Wegen des gemeinsamen Punktes folgt aus $g_{B'} \parallel PB'B_1$ daher $g_{B'} \subseteq PB'B_1$

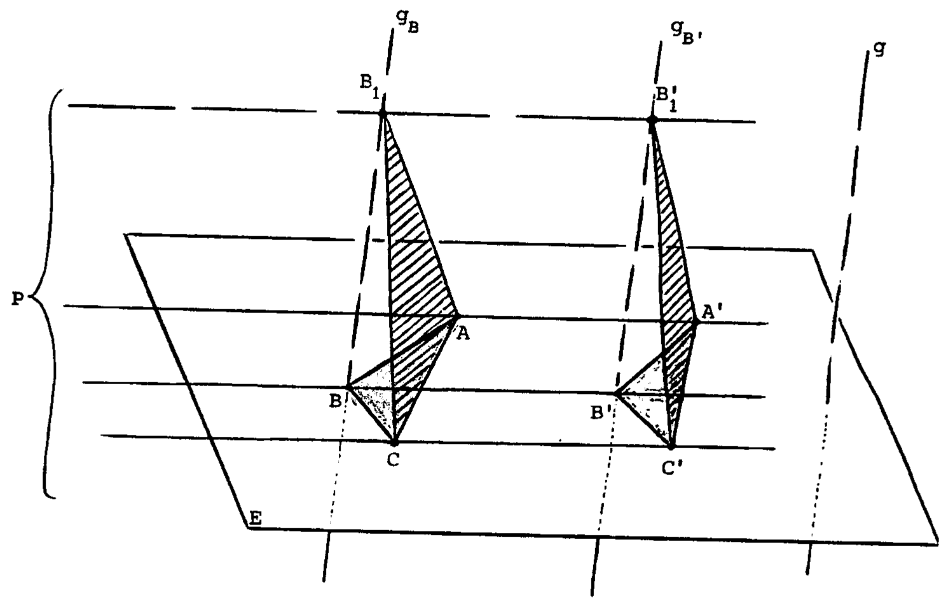
Nun definieren wir $B_1' := g_{B'} \cap PB_1$. Dieser Punkt existiert; andernfalls ergäbe sich aus $g_B \parallel g_{B'} \parallel PB_1 \subseteq PB_1B'$ und $B_1 \in g_B \cap PB_1$ sofort $g_B = PB_1$, woraus nach (2.15) dann $P = B$ (s. Figur 24) bzw. (wegen $PB_1 \parallel E$ in der Situation von Figur 25) $g \parallel E$ folgte, ein Widerspruch. Die Geraden AB_1 und $A'B_1'$ sind parallel, denn sie liegen in der Ebene

[1]Ist P uneigentlich, so bezeichnen wir mit PB_1 die Gerade aus P durch B_1 und mit $PB'B_1$ die Ebene durch $B'B_1$, die eine Gerade aus P enthält.

PAB_1, und ein eventueller eigentlicher Schnittpunkt ginge bei der Parallelprojektion $\tilde{\pi}$ des Raumes auf die Ebene E längs g in einen eigentlichen Schnittpunkt von AB und A'B' über. Die Punkte $P, A, B_1, C, A', B_1', C'$ bilden also eine räumliche Desargues-Figur. Gemäß dem Ergebnis des 1. Falles sind auch die Geraden B_1C und $B_1'C'$ Parallelen. Ihre Bilder unter $\tilde{\pi}$ sind nach (2.17) daher ebenfalls parallel, w.z.b.w. □



Figur 24



Figur 25

(2.19) <u>Folgerung</u>

In jeder Unterebene $F \in E$ gilt der affine Satz von Desargues.

Anmerkung: Eine affine Ebene, in der der affine Satz von Desargues gilt, heißt *desarguessche affine Ebene*. Man kann zeigen, dass in einer desarguesschen affinen Ebene auch die Folgerung des Hilfssatzes (1.11) gilt.

Aufgabe 14

Ein Parallelogramm liege gezeichnet vor. Kann man dann (in der Zeichenebene) nur mit dem Lineal durch einen gegebenen Punkt P eine Parallele zu einer gegebenen Geraden ziehen (vorausgesetzt, die zur Konstruktion benötigten Schnittpunkte liegen alle auf dem Zeichenblatt) ?

Lösungshinweis: Wählen Sie zunächst P als Punkt des Parallelogramms. (Zur Argumentation verwenden Sie eine affine Ebene als Modell für die Zeichenebene !)

C*) Der projektive Abschluß eines affinen Raumes

M In den vorangegangenen Sätzen und Beweisen war immer wieder zu unterscheiden, ob sich zwei Geraden einer Ebene schneiden oder parallel sind. Durch die Einführung uneigentlicher Elemente ließ sich hierbei eine Vereinfachung erzielen, die aber erst dann richtig zum Tragen kommt, wenn man eigentliche und uneigentliche Elemente als "gleichberechtigt" behandelt; dieses Vorgehen wollen wir im Rest des Paragraphen andeuten. (Eine weitere Motivation für die projektive Betrachtungsweise erfolgt in § 5.) Allerdings benutzen wir zunächst noch weiter die Bezeichungen "uneigentlich" und "eigentlich", zeichnen also weiterhin noch einen "affinen Teil" aus. M

(2.20) Definition (Projektiver Abschluß)*

Zu einem 3-dim affinen Raum A definieren wir seinen *projektiven Abschluß* $P := \hat{A}$ als die Mengen der eigentlichen und uneigentlichen Punkte, Geraden, Ebenen von A mit der induzierten Inzidenz (s. 2.8, vgl. auch Aufg. 10). Genauer gelte:

Punkte von P sind die eigentlichen und uneigentlichen Punkte von A. (Hierbei bezeichne U_g den uneigentlichen Punkt mit $g \in U_g$)

Geraden von P sind die Mengen

$\hat{g} := \{P | P \in g\} \cup \{U_g\}$

für jede Gerade g von A

sowie die Mengen

$U_E := \{U_g | g \subseteq E\}$ (uneigentliche Gerade von E)

für jede Ebene E von A

Ebenen von P sind die Mengen

$\hat{E} := \{P | P \in E\} \cup U_E$

für jede Ebene E von A sowie

$E_\infty := \{U_g | g \text{ Gerade von } A\}$. (uneigentliche Ebene von A)

(2.21)* Anmerkung

Man überzeugt sich nun von folgenden Aussagen:

(i) Der projektive Abschluß P eines 3-dim affinen Raumes ist ein Inzidenzraum mit ($I5$) und ($I6$). Über ($I5$) hinaus gilt sogar:

(ii) Je zwei (verschiedene) Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

ad(i) Wir geben hier exemplarisch nur eine Beweisskizze für ($I1$) (vgl. auch Aufg. 10): Seien P,Q zwei Punkte von P; sind beide eigentlich, so bestimmen sie eine eindeutige eigentliche Gerade g, und es gilt $P, Q \in \hat{g}$. Keine weitere Gerade kann P und Q enthalten. Ist P eigentlicher und Q uneigentlicher Punkt von A, so existiert eine Gerade g mit $P \in g$ und $Q = U_g$. Wieder ist $\hat{g}$ die einzige Gerade mit $P, Q \in \hat{g}$. Sind schließlich P und Q beide uneigentlich, etwa $P = U_g$ und $Q = U_h$ (mit $g \nparallel h$), so existiert eine Parallele h' zu h mit $h \cap g \neq \emptyset$, damit eine Ebene E mit $g, h' \subseteq E$ und somit $U_g, U_h \in U_E$. Aus $U_g, U_h \in U_{E''}$ folgt umgekehrt $g \parallel g''$ und $h' \parallel h''$ für Geraden g", h" mit $g'', h'' \subseteq E''$; nach (2.9) ergibt sich daraus $E \parallel E''$, also $U_E = U_{E''}$.

ad (ii) Wir unterscheiden 3 Fälle. Seien zunächst $E_1 = \hat{E}$ und $E_2 = E_\infty$; dann sind die gemeinsamen Punkte von E_1 und E_2 uneigentlich, nämlich genau die Punkte von U_E. Seien $E_1 = \hat{E}$ und $E_2 = \hat{E}'$ und $E \nparallel E'$; dann existiert eine Gerade $g (= E \cap E')$ mit $\hat{g} \subseteq E_1 \cap E_2$; zu einem eventuellen weiteren uneigentlichen Punkt aus $E_1 \cap E_2$ gehörten Geraden $h \subseteq E$ und $h' \subseteq E'$ mit $g \nparallel h$ und $h \parallel h'$. Da g und h in E lägen, folgte $|g \cap h| = 1$ und daraus $|h \cap E'| = 1$. Gemäß (2.15a) ergäbe sich nun $|h' \cap E'| = 1$, ein Widerspruch.

Ist schließlich $E_1 = \hat{E}$ und $E_2 = \hat{E}'$ mit $E \parallel E'$, so folgt $E_1 \cap E_2 = U_E = U_{E'}$.
□

Die Einführung des projektiven Abschlußes P gestattet es nun, die verschiedenen Varianten des Satzes von Desargues (1.11) und (2.18) zusammenzufassen und zu verallgemeinern zu folgendem Satz:

(2.22)* Satz von Desargues (Projektive Form)

> Für den projektiven Abschluß P eines 3-dim affinen Raums gilt der Satz von Desargues:
> Seien a,b,c drei Geraden von P mit gemeinsamem Punkt; seien ferner A,A',B,B',C,C' von P verschiedene Punkte mit folgenden Eigenschaften:
> $A, A' \in a$, $B, B' \in b$, $C, C' \in c$, $AB \neq A'B'$. $AC \neq A'C'$ und $BC \neq B'C'$.
> Dann existieren die Schnittpunkte $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ und $BC \cap B'C'$ und sind kollinear.

(Siehe dazu nochmals Figur 10! Allerdings sind jetzt uneigentiche Punkte, Geraden und Ebenen zugelassen!)

Aufgabe 15*

Beweisen Sie den Satz von Desargues für den projektiven Abschluß eines 3-dim affinen Raumes.

Lösungshinweis:

Übertragen Sie die Beweise zu 1.11 und 2.18 sinngemäß! (Projektion von einem Zentrum aus!). Beachten Sie auch (2.21)!

Aufgabe 16*

Beweisen Sie für den projektiven Abschluß eines 3-dim affinen Raumes die Umkehrung des Satzes von Desargues: Seien A,B,C,A',B',C' paarweise verschiedene Punkte und $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$ verschiedene Geraden. Liegen dann $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ und $BC \cap B'C'$ auf einer Geraden, so schneiden sich a,b und c in einem Punkt.

Lösungshinweis: Wenden Sie 2.22 direkt auf geeignete "Dreiecke" an!

Aufgabe 17*

Gegeben seien zwei Geraden a,b der Zeichenebene, deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt. Man konstruiere allein mit dem Lineal die Verbindungsgerade eines Punktes Q mit dem unzugänglichen Punkt S. (Dabei verwende man wieder eine desarguessche affine Ebene als Modell für die Zeichenebene).