Tupel aus n natürlichen Zahlen, für die alle Summen verschieden sind, und ein Maßkonzentrations-Phänomen

Ehrhard Behrends

Bei der Analyse des mathematischen Hintergrunds eines Zaubertricks[1] tauchte das folgende Problem auf: Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ finde man natürliche Zahlen $a_1 < \cdots < a_n$ so, dass die $2^n - 1$ möglichen Summen $a_\Delta := \sum_{i\in\Delta} a_i$ für nichtleere Teilmengen $\Delta \subset \{1,\ldots,n\}$ alle verschieden sind und a_n möglichst klein ist. Ein Beispiel, für das alle Summen verschieden sind, ist schnell gefunden. Man wähle einfach die Zahlen $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$. Doch kann man a_n auch kleiner, vielleicht sogar viel kleiner als 2^{n-1} wählen? Im Fall $n = 3$ ist das kleinstmögliche Beispiel wirklich $1, 2, 4$, aber schon für $n = 4$ ist $3, 5, 6, 7$ ein möglicher Kandidat mit $a_4 = 7 < 8 = 2^{4-1}$.

Das Problem ist wahrscheinlich erstmals von Erdös 1931 betrachtet worden (zitiert nach [3]). Erdös vermutete, dass es nicht wesentlich besser als 2^{n-1} gehen kann. Er setze 500 Dollar für einen Beweis der folgenden Aussage aus: Es gibt ein positives c, so dass das bestmögliche a_n stets größer als $c \cdot 2^{n-1}$ ist. Das Problem ist weiterhin offen, auch wenn im Lauf der Zeit einige asymptotische Abschätzungen gefunden wurden (siehe [2] – [7]).

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen. n ganze Zahlen $0 < a_1 < \cdots < a_n$ sollen *Summen-separiert* heißen, wenn die $2^n - 1$ Summen a_Δ alle verschieden sind[2]. $f(n)$ bezeichne das kleinste a_n, für das $0 < a_1 < \cdots < a_n$ bei Wahl geeigneter $a_1, \ldots, a_{n-1}$ Summen-separiert ist. Wegen des Beispiels $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ ist klar, dass $f(n) \le 2^{n-1}$ gilt.

Seien die a_i so, dass $a_n = f(n)$. Die $2^n - 1$ verschiedenen Summen liegen alle in $1, 2, \ldots, n \cdot f(n)$, und deswegen folgt, dass $n \cdot f(n) \ge 2^n - 1$, also $f(n) \ge 2^n/n$. 1955 haben Erdös und Moser ([5]) gezeigt, dass sogar $f(n) \ge 2^n/(4\sqrt{n})$ gilt, und im Buch von Alon und Spencer ([1]) findet man dazu einen auf der Tschebyscheff-Ungleichung beruhenden Beweis.

Abschätzungen nach oben wurden wie folgt gefunden. Man konstruiert eine spezielle Summen-separierte Familie $0 < a_1 < \cdots < a_{n_0}$, so dass für ein (möglichst kleines) c die Ungleichung $a_{n_0} \le c \cdot 2^{n_0-1}$ gilt. Dann ist natürlich auch $f(n_0) \le c \cdot 2^{n_0-1}$. Und dann hilft eine elementare Überlegung weiter: Ist $0 < a_1 < \cdots < a_n$ Summen-separiert, so auch die aus $n+1$ Zahlen bestehende Familie $0 < 1 < 2a_1 < \cdots < 2a_n$. Das impliziert sofort $f(n+1) \le 2f(n)$, und man wüsste, dass $f(n) \le c \cdot 2^{n-1}$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Die bisher beste mit dieser Technik gefundene asymptotische Konstante ist $c = 0.44004$, sie wurde von Bohmann in [3] angegeben. (Sie verbessert minimal den von Lunnon in [7] gefundenen Wert $c = 0.44192$.)

Ziel der vorliegenden Arbeit ist weniger die Herleitung asymptotischer Abschätzungen als vielmehr die Entwicklung einer neuen Strategie zum Auffinden von Summen-separierten n-Tupeln. Wir leiten auch eine neue untere Abschätzung für $f(n)$ mit

[1] Vgl. das Ende der Einleitung

[2] In der englischen Literatur spricht man von der *SSD property*. Dabei steht SSD für *Subset-Sum Distinctness*.

Hilfe eines Maß-Konzentrations-Ergebnisses her, die für kleine n besser als die bekannten unteren Schranken ist.

Für eine erste Orientierung kann man sich Computerhilfe zunutze machen. Die systematische Rechnung zu $n = 8$ wurde mit einem Programm des Autors durchgeführt.

– $f(3) = 4$, und $1, 2, 4$ sowie $2, 3, 4$ (und keine weiteren 3-Tupel) genügen der Bedingung $a_3 \leq 4$.

– $f(4) = 7$, und $3, 5, 6, 7$ (aber kein weiteres 4-Tupel) genügt der Bedingung $a_4 \leq 7$.

– $f(5) = 13$, und $3, 6, 11, 12, 13$ sowie $6, 9, 11, 12, 13$ (und keine weiteren 5-Tupel) genügen der Bedingung $a_5 \leq 13$.

– $f(6) = 24$, und $11, 17, 20, 22, 23, 24$ (aber kein weiteres 6-Tupel) genügt der Bedingung $a_6 \leq 24$.

– $f(7) = 44$, und $20, 31, 37, 40, 42, 43, 44$ (aber kein weiteres 7-Tupel) genügt der Bedingung $a_7 \leq 44$.

– $f(8) = 84$, und $20, 40, 71, 77, 80, 82, 83, 84$ sowie $39, 59, 70, 77, 78, 79, 81, 84$ und $40, 60, 71, 77, 80, 82, 83, 84$ (aber kein weiteres 8-Tupel) genügen der Bedingung $a_8 \leq 84$.

Weiter lassen sich die konkreten Rechnungen nicht fortsetzen. Schon für $n = 9$ sind ja alle 9-Tupel $0 < a_1 < \cdots < a_9 \leq 256$ potentielle Kandidaten: Wie groß ist das kleinste a_9, für das $a_1, \ldots, a_9$ Summen-separiert ist? Es wäre die unrealistisch große Zahl von $\binom{256}{9} \approx 1.13 \cdot 10^{16}$ Möglichkeiten zu überprüfen[3].

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Wir beginnen in Abschnitt 1 mit einer konkreten Konstruktion: Summen-separierte n-Tupel werden mit Hilfe *schwach Summen-separierter n-Tupel* konstruiert. Sie liefert für „kleine“ n optimale Ergebnisse und stets obere Schranken für $f(n)$. In der einfachsten Form ist sie mit der in [2] vorgeschlagenen Konstruktion verwandt, die verfeinerte Version verbessert die Abschätzungen in [7]; auch werden neue optimale n-Tupel angegeben.

In Abschnitt 2 gibt es dann einen Exkurs: Gewisse Maße auf $\mathbb{R}$ tendieren dazu, auf geeigneten kleinen Intervallen weit größere Werte zu haben, als eine naive Abschätzung vermuten lässt. Dieses Maßkonzentrations-Phänomen wird dann in Abschnitt 3 ausgenutzt werden, um untere Schranken für $f(n)$ zu beweisen.

Das hier untersuchte Problem wurde, wie schon erwähnt, durch ein Zauberkunststück motiviert, das ich durch einen Artikel des Zauberers Werner Miller aus Österreich kennen gelernt habe. Eine stark vereinfachte Variante kann, mathematisch formuliert, wie folgt beschrieben werden.

Es gibt n Spieler, vor denen ein Stapel mit roten und schwarzen Karten liegt. Der Zauberer ist noch abwesend. Jeder nimmt sich eine rote oder eine schwarze Karte und befolgt dann die Anweisung, die er in einem Umschlag findet: Im Umschlag

[3] Eine drastische Verringerung der nachzuprüfenden Möglichkeiten ergibt sich daraus, dass $f(8) = 84$ schon gezeigt ist. Deswegen muss, wie oben begründet, $f(9) \leq 168$ gelten, und es sind folglich „nur“ noch $\binom{168}{9} \approx 2.36 \cdot 10^{14}$ Kandidaten zu betrachten.

des k-ten Spielers steht die Anweisung: „Wenn Du eine rote Karte genommen hast, lege a_k Cent-Stücke auf den Tisch“. Die restlichen roten und schwarzen Karten werden beiseite gelegt, der Zauberer kommt dazu. Er sieht nur die Cent-Stücke auf dem Tisch und kann dann genau sagen, wer eine rote und wer eine schwarze Karte genommen hat. Die Lösung: Er kennt die Summe S der a_k über die k, für die der Spieler eine roten Karte genommen hat, und wenn man $a_1, \ldots, a_k$ Summen-separiert gewählt hat, lässt sich genau sagen, wie die Karten verteilt sind. Besonders einfach ist es, wenn man $a_k = 2^{k-1}$ festsetzt. Dann muss der Zauberer nur in Gedanken die Binärdarstellung von S ermitteln. Schöner wären „unauffälligere“ a_k, und es ist sicher auch wünschenswert, dass diese Zahlen möglichst klein sind. *So* wurde ich auf das Problem aufmerksam.

1. Schwach Summen-separierte n-Tupel und eine obere Schranke für $f(n)$

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einer Plausibilitätsbetrachtung. Damit $0 < a_1 < \cdots < a_n$ Summen-separiert ist, sollte $a_1 + \cdots + a_n$ eher groß als klein sein, denn dann ist die Chance größer, dass alle a_Δ verschieden ausfallen. Das erreicht man dadurch, dass die größten a_i, also $a_n, a_{n-1}, \ldots$, nahe beieinander liegen. Mehr als 3 können aber nicht direkt aufeinanderfolgen, denn eine Folge, die $t, t+1, t+2, t+3$ enthält, kann nicht Summen-separiert sein: Es wäre dann ja $t + (t+3) = (t+1) + (t+2)$. Wirklich enden fast alle obigen Beispiele für $n \geq 4$ mit drei aufeinanderfolgenden Zahlen, nur für $n = 8$ gibt es ein Beispiel, in dem Zahlen $k, k+1, k+2$ zwar auftreten, aber nicht am Ende.

Es scheint auch so, dass die optimalen $a_1, \ldots, a_n$ zwar recht irregulär sind, dass sich aber für die Abstände zum letzten Element, also die $a_n - a_i$, eine gewisse Regelmäßigkeit erkennen lässt. Zum Beispiel:

– Für $n = 5$ ist $6, 9, 11, 12, 13$ optimal, und die $a_5 - a_i$ sind die Zahlen $0, 1, 2, 4, 7$.

– Für $n = 6$ ist $11, 17, 20, 22, 23, 24$ optimal, und die $a_6 - a_i$ sind die Zahlen $0, 1, 2, 4, 7, 13$.

– Für $n = 7$ ist $20, 31, 37, 40, 42, 43, 44$ optimal, und die $a_5 - a_i$ sind die Zahlen $0, 1, 2, 4, 7, 13, 24$.

Welche Eigenschaften haben die $a_n - a_i$? Wir führen eine weitere Definition ein: Ganze Zahlen $b_1 < \cdots < b_n$ heißen *schwach Summen-separiert*, wenn für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$ die $\binom{n}{l}$ Zahlen $b_\Delta := \sum_{i \in \Delta} b_i$ für die l-elementigen $\Delta \subset \{1, \ldots, n\}$ verschieden sind. (Für diese Vorbereitung lassen wir also ausdrücklich *ganze Zahlen* zu.) Trivialerweise wird diese Eigenschaft von der Summen-Separiertheit impliziert, doch die Umkehrung muss nicht gelten. Unsere Strategie zum Auffinden Summen-separierter a_i wird aus zwei Schritten bestehen:

- Konstruiere schwach Summen-separierte $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.
- Ordne einer schwach Summen-separierten Familie eine Summen-separierte Familie zu.

1.1 Lemma: *$b_1 < \cdots < b_n$ sei ein schwach Summen-separiertes n-Tupel. Für $l = 1, \ldots, n$ bezeichnet A_l die Menge derjenigen Zahlen, die als Summen von l Summanden aus $\{b_1, \ldots, b_n\}$ entstehen.*

(i) Für beliebige $b, b' \in \mathbb{Z}$ mit $b' \neq 0$ ist $b'b_1 - b, b'b_2 - b, \ldots, b'b_n - b$ schwach Summen-separiert.

(ii) Die ganze Zahl b liege nicht in $\bigcup_{l=2}^{n} A_l - A_{l-1}$. (Dabei ist $A_l - A_{l-1}$ die Menge $\{c - d \mid c \in A_l, d \in A_{l-1}\}$.)
Dann ist auch $\{b_1, \ldots, b_n\} \cup \{b\}$ schwach Summen-separiert.

Ein Beispiel für so ein b kann wie folgt gefunden werden: Die Zahl b sei größer als $(b_{\rho+1} + b_{\rho+2} + \cdots + b_{2\rho}) - (b_1 + \cdots + b_{\rho-1})$ falls $n = 2\rho$ gerade ist, und größer als $(b_{\rho+1} + b_{\rho+2} + \cdots + b_{2\rho+1}) - (b_1 + \cdots + b_{\rho-1})$, falls $n = 2\rho + 1$ ungerade ist.

(iii) Es sei zusätzlich $b_1 = 0$, dann heißt das Tupel normalisiert*. Für ein $b \in \mathbb{N}$ mit $b > b_n$ definiere $a_1 := b - b_n, a_2 := b - b_{n-1}, \ldots, a_n := b - b_1$. Dann ist $a_1, \ldots, a_n$ genau dann Summen-separiert, wenn die Mengen $l \cdot b - A_l := \{l \cdot b - c \mid c \in A_l\}$ für $l = 1, \ldots, n$ paarweise disjunkt sind. Das ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn b größer ist als*

$$(b_{\rho+1} + b_{\rho+2} + \cdots + b_{2\rho}) - (b_1 + \cdots + b_{\rho-1})$$

im Fall gerader $n = 2\rho$ bzw. größer als

$$(b_{\rho+1} + b_{\rho+2} + \cdots + b_{2\rho+1}) - (b_1 + \cdots + b_{\rho-1})$$

im Fall ungerader $n = 2\rho + 1$.

Beweis: (i) Das ist klar.

(ii) Der erste Teil der Behauptung ist leicht einzusehen. Für den zweiten Beweisteil richten wir es so ein, dass alle Elemente von $b + A_{l-1}$ größer als alle Elemente von A_l sind. Das ist gleichbedeutend damit, dass das kleinste Element von $b + A_{l-1}$ (also $b + b_1 + \cdots + b_{l-1}$) größer ist als das größte Element von A_l (also $b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-l+1}$). Das bedeutet

$$b > b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-l+1} - (b_1 + \cdots + b_{l-1}).$$

Die rechte Seite ist wegen $b_1 < \cdots < b_n$ monoton steigend in l und von einer Stelle an konstant, da sich für größere l in $b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-l+1}$ und $b_1 + \cdots + b_{l-1}$ einige Summanden wegheben.Das konkrete Maximum hängt davon ab, ob n gerade oder ungerade ist. Es kann wie angegeben explizit dargestellt werden.

(iii) Der erste Teil der Aussage ist klar. Für den zweiten Teil soll die paarweise Disjunktheit der $l \cdot b - A_l$ dadurch erzwungen werden, dass das größte Element von $(l-1) \cdot b - A_{l-1}$ (also $(l-1) \cdot b - (b_1 + \cdots + b_{l-1})$) kleiner ist als das kleinste Element von $l \cdot b - A_l$ (also $l \cdot b - (b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-l+1})$). Wir fordern also:

$$b > (b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-l+1}) - (b_1 + \cdots + b_{l-1}), \; l = 2 \ldots, n.$$

In Abhängigkeit von n gerade/ungerade kann das (analog zum vorigen Beweis) wie in (iii) angegeben explizit umgeformt werden. $\square$

$\boxed{\textit{Der erste Versuch}}$

Das Lemma motiviert die Konstruktion einer Folge $g_1 < g_2 < \ldots$ ganzer Zahlen, so dass $g_1, \ldots, g_n$ für jedes n schwach Summen-separiert ist. Wir definieren $g_1 := 0$, $g_2 := 1$, $g_3 := 2$ und konstruieren dann die g_{n+1} für $n \geq 3$ rekursiv wie folgt:

Ist $n = 2\rho$ gerade, so sei

$$g_{n+1} := (g_{\rho+1} + g_{\rho+2} + \cdots + g_{2\rho}) - (g_1 + \cdots + g_{\rho-1}) + 1.$$

Ist dagegen $n = 2\rho + 1$ ungerade, so setze

$$g_{n+1} := (g_{\rho+1} + g_{\rho+2} + \cdots + g_{2\rho+1}) - (g_1 + \cdots + g_{\rho-1}) + 1.$$

Als Konsequenz des Lemmas sind alle n-Tupel $g_1, \ldots, g_n$ schwach Summen-separiert. Hier sind die ersten g_n:

$$g_1 = 0, g_2 = 1, g_3 = 2, g_4 = 4, g_5 = 7, g_6 = 13, g_7 = 24, g_8 = 46, g_9 = 88, \ldots$$

Obwohl sich die g_n auf recht komplizierte Weise ergeben haben, lässt sich ein Bildungsgesetz angeben:

1.2 Lemma: *Für $n \geq 2$ gilt: Ist $n = 2\rho$ gerade oder $n = 2\rho + 1$ ungerade, so ist $g_{n+1} = 2g_n - g_\rho$.*

Beweis: Sei etwa $n = 2\rho$ gerade. Aufgrund der Definition ist

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= (g_{\rho+1} + \cdots + g_{2\rho}) - (g_1 + \cdots + g_{\rho-1}) + 1 \\ &= g_n - g_\rho + (g_\rho + \cdots + g_{2\rho-1}) - (g_1 + \cdots + g_{\rho-1}) + 1 \\ &= 2g_n - g_\rho. \end{aligned}$$

Der Fall ungerader n kann analog behandelt werden. □

Mit Teil (iii) des Lemmas kann nun eine Summen-separierte Familie konstruiert werden. Fixiert man n, so ist die Formel für das g in (iii) die gleiche, mit der das jeweils nächste g_n berechnet wurde. Deswegen ist $g = g_{n+1}$. Das ist die (ohne Motivation) in [2] vorgeschlagene Konstruktion Summen-separierter n-Tupel. Sie liefert für $n \leq 6$ optimale Ergebnisse. Für $n = 7$ wird aber $22, 33, 39, 42, 44, 45, 46$ erzeugt, doch es ist $f(7) = 44$ (s.o.). Für größere n weicht das maximale Element der mit dieser Methode gefunden n-Tupel immer mehr von $f(n)$ ab. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $f(n)/2^{n-1}$ mit $n \to \infty$ gegen $0.63336...$ konvergiert, asymptotisch sind also für das maximale a_n viel bessere Werte zu erreichen als 2^{n-1}.

Der zweite Versuch

Die Möglichkeiten von Lemma 1.1 wurden bei der vorstehenden Konstruktion nicht ausgeschöpft. Es gibt *zwei Ansätze* für Verbesserungen.

Der erste Ansatz: Wie wurde das jeweils nächste Element gefunden? Wenn wir $\{b_1, \ldots, b_n\}$ schon konstruiert haben, so kann doch als nächstes Element ein beliebiges b genommen werden, das (mit den Bezeichnungen des Lemmas) nicht in $\bigcup_l (A_l - A_{l-1})$ liegt. Im zweiten Teil von Lemma 1.1.(ii) wurde das dadurch erreicht, dass alle Elemente von $b + A_{l-1}$ größer sind als alle Elemente von A_l ($l = 2, \ldots, n$).

Das ist aber nicht zwingend. Wir betrachten die folgende Variante. Ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ schon als schwach Summen-separierend identifiziert, so sei

- B^+ die Menge B, vermehrt um das kleinste positive Element, das nicht in $\bigcup_l (A_l - A_{l-1})$ liegt.

- B^- die Menge B, vermehrt um das betragsmäßig kleinste negative Element, das nicht in $\bigcup_l (A_l - A_{l-1})$ liegt.

Wegen des Lemmas sind $B^\pm$ wieder schwach Summen-separiert, und das Verfahren kann iteriert werden. Zur Abkürzung setzen wir (zum Beispiel) $B^{+-} := (B^+)^-$, $B^{+-+} := (B^{+-})^+$, usw. Auf diese Weise entstehen viele neue schwach Summen-separierte Mengen, durch die dann mit Lemma 1.1 (iii) neue Summen-separierte n-Tupel erzeugt werden können.

Hier ist ein Beispiel, wir starten mit $B := \{0\}$:

$$B^+ = \{0, 1\},\ B^{+-} = \{0, 1, -1\},\ B^{+-+} = \{0, 1, -1, 3\}$$

$$B^{+-+-} = \{0, 1, -1, 3, -5\}, B^{+-+--} = \{0, 1, -1, 3, -5, -11\}.$$

Die Elemente müssen dann nur noch sortiert und so verschoben werden, dass eine normalisierte Familie entsteht, um mit Lemma 1.1(iii) ein Summen-separiertes n-Tupel zu erhalten.

Der zweite Ansatz: Wenn $0 = b_1 < \cdots < b_n$ schwach Summen-separiert ist, so kann man b in 1.1(iii) so wählen, dass das größte Element von $(l-1) \cdot b - A_{l-1}$ jeweils kleiner ist als das kleinste Element von $l \cdot b - A_l$. Dann muss man nur noch zu den $b - b_i$ übergehen.

Die paarweise Disjunktheit der $l \cdot b - A_l$ lässt sich aber manchmal auch mit kleineren b erreichen. Der Grund: Diese Mengen sind oft an den Rändern „ausgefranst". Als Beispiel sieht man hier die $l \cdot b - A_l$ für $l = 2, 3, 4, 5, 6$ im Fall $n = 7$ und $b = 46$. (Oben links: die $\binom{7}{2}$ Elemente von $46 - A_2$, jeweils durch einen kleinen senkrechten Strich markiert, in der nächsten Zeile die $\binom{7}{3}$ Elemente von $46 - A_3$ usw.) Es ist naheliegend zu versuchen, diese Mengen noch ein bisschen nach links zu schieben, ohne die Bedingung der paarweisen Disjunktheit zu verletzen:

Die $l \cdot b - A_l$ für $l = 2, 3, 4, 5, 6$ im Fall $n = 7$ und $b = 46$.

Unser zweiter Ansatz besteht damit in folgender Konstruktion bei vorgelegten $0 = b_1 < \cdots < b_n$:

Suche erstens ein b (zum Beispiel mit Lemma 1.1(iii), so dass die $b - b_i, i = 1, \ldots, n$ Summen-separiert sind. Teste dann „viele" $k = 1, 2, \ldots$ daraufhin, ob auch die $b - b_i - k, i = 1, \ldots, n$ Summen-separiert sind.

In unserem *zweiten Versuch* kombinieren wir beide Ansätze: Er soll *die $\pm$-Konstruktion* genannt werden:

Für gegebenes n berechne mit $B := \{0\}$ alle $B^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}}$, wo $\varepsilon_i \in \{-, +\}$. Sortiere und verschiebe so, dass $b_0 = 0$. Die 2^{n-1} verschiedenen $(n-1)$-Tupel der ε_i müssen dabei nicht zu verschiedenen $b_1 < \cdots < b_n$ Anlass geben.
Suche ein b wie im zweiten Ansatz beschrieben.

Das Verfahren ist sehr rechenintensiv. Es werden aber alle bekannten optimalen Summen-separierten Tupel gefunden und auch noch einige, die schon bekannte Beispiele verbessern. Um das zu präzisieren, muss die in [7] beschriebene *Conway-Guy-Konstruktion* beschrieben werden. Da setzt man $u_0 := 0, u_1 := 1$ und dann rekursiv $u_{n+1} := 2u_n - u_{n-m}$, wobei m die größte ganze Zahl z mit $z \leq 0.5 + \sqrt{2n}$ ist. Man weiß, dass für jedes n die $u_n - u_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$ Summen-separiert sind, und mit dieser Konstruktion kann die asymptotische Abschätzung $f(n) \leq 0.44192 \cdot 2^{n-1}$ gefunden werden. Es folgt ein direkter Vergleich:

$n = 2, 3, 4, 5, 6$: Alle Verfahren finden die optimalen n-Tupel.

$n = 7$. Das Conway-Guy-Verfahren und das $\pm$-Verfahren finden das 7-Tupel $20, 31, 37, 40, 42, 43, 44$,

$n = 8$. Das Conway-Guy-Verfahren und das $\pm$-Verfahren finden $40, 60, 71, 77, 80, 82, 83, 84$. Das $\pm$-Verfahren erzeugt auch $39, 59, 70, 77, 78, 79, 81, 84$, aber das Tupel $20, 40, 71, 77, 80, 82, 83, 84$ mit ebenfalls minimalem $a_8 = 84$ wurde nur durch brute-force-Rechnung ermittelt.

$n = 9, 10, 11$. Conway-Guy-Verfahren und $\pm$-Verfahren erzeugen jeweils die gleiche Summen-separierte Familie:

$77, 117, 137, 148, 154, 157, 159, 160, 161$ für $n = 9$

$148, 225, 265, 285, 296, 302, 305, 307, 308, 309$ für $n = 10$.

$285, 433, 510, 550, 570, 581, 587, 590, 592, 593, 594$ für $n = 11$.

$n = 12$. Beide Verfahren finden $570, 855, 1003, 1080, 1120, 1140, 1151, 1157, 1160, 1162, 1163, 1164$. Durch das $\pm$-Verfahren wird die Schranke aber verbessert: Auch $556, 845, 995, 1073, 1112, 1134, 1145, 1151, 1155, 1156, 1157, 1159$ ist Summen-separiert.

$n = 13$. Beide Verfahren finden $1120, 1690, 1975, 2123, 2200, 2240, 2260, 2271, 2277, 2280, 2282, 2283, 2284$. Durch das $\pm$-Verfahren wird die Schranke aber verbessert: Auch $1085, 1649, 1942, 2094, 2170, 2213, 2235, 2246, 2254, 2256, 2257, 2258, 2262$ ist Summen-separiert.

$n = 14$. Beide Verfahren finden $2200, 3320, 3890, 4175, 4323, 4400, 4440, 4460, 4471, 4477, 4480, 4482, 4483, 4484$. Durch das $\pm$-Verfahren wird die Schranke aber verbessert: Auch $2213, 3298, 3862, 4155, 4307, 4383, 4426, 4448, 4459, 4467, 4469, 4470, 4471, 4475$ ist Summen-separiert.

Die Rechnungen sollen hier abgebrochen werden, da die asymptotischen Abschätzungen im Vergleich zu den bekannten Verfahren nur unwesentlich besser sind[4].

2. Maßkonzentration

Maßkonzentrations-Phänomene sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohlbekannt. Zum Beispiel konzentrieren sich bei Abfragen unabhängiger Zufallsvariablen die Mittelwerte um den Erwartungswert, und durch das schwache Gesetz der großen Zahlen und den zentralen Grenzwertsatz kann das auch quantifiziert werden.

[4] Zum Beispiel könnte es statt „$f_n \leq 0.5473 \cdot 2^{n-1}$ für $n \geq 14$“ nun „$f_n \leq 0.5462 \cdot 2^{n-1}$ für $n \geq 14$“ heißen.

Hier soll ein Phänomen beschrieben werden, das für die Untersuchung unterer Schranken für $f(n)$ von Interesse ist (vgl. das nächste Kapitel). Wir fixieren eine natürliche Zahl r und wählen irgendwelche reelle Zahlen $0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$. Das gibt Anlass zu einem Maß $\mu = \sum_{i=1}^{r} \delta_{x_i}$, wobei δ_x das Diracmaß bei x bezeichnet. Für nichtleere $\Delta \subset \{1, \ldots, r\}$ setzen wir $x_\Delta := \sum_{i \in \Delta} x_i$, auf diese Weise werden $2^r - 1$ (nicht notwendig verschiedene) Zahlen erzeugt. Wir verabreden: Ist z.B. $\Delta = \{2, 3, 5\}$, so werden wir $x_{2,3,5}$ schreiben, obwohl es eigentlich etwas schwerfälliger $x_{\{2,3,5\}}$ heißen müsste.

Setze $\mu^* := \sum_{\emptyset \neq \Delta \subset \{1,\ldots,r\}} \delta_{x_\Delta}$. Dieses Maß hat seinen Träger in $]\,0, r\,]$, und das Maß dieses Intervalls ist $2^r - 1$. Für eine Borelmenge A ist $\mu^*(A)$ die Anzahl der x_Δ in A.

Zerlegt man $]\,0, r\,]$ disjunkt in $]\,0, 1\,] \cup]\,1, 2\,] \cup \cdots \cup]\,r-1, r\,]$, so muss folglich für mindestens eines dieser Intervalle $\mu^*(]\,i, i+1\,]) \geq (2^r - 1)/r$ gelten. Überraschender Weise lässt sich viel mehr aussagen: Es gibt, wenigstens für kleine r, ein Intervall $]\,x-1, x\,]$, auf das viel mehr Masse konzentriert ist als durch die vorstehende Abschätzung angegeben. Es ist offen, ob auch bessere Abschätzungen für beliebige r möglich sind.

Die hier relevante Definition ist die folgende. S_r soll die Menge derjenigen $\gamma \in \mathbb{R}$ sein, die der folgenden Bedingung genügen: Egal, wie man die $0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$ wählt, es gibt immer ein x, so dass $\mu^*(]\,x-1, x\,]) \geq \gamma$. Es wurde schon bemerkt, dass $(2^r - 1)/r$ zu S_r gehört. Wir setzen $\gamma_r := \max S_r$. Klar ist dann, dass $(2^r - 1)/r \leq \gamma_r \leq 2^r - 1$. Aufgrund des folgenden Lemmas gilt $\gamma_r \leq 2^{r-1}$:

2.1 Lemma: *Für jedes x ist $\mu^*(]\,x-1, x\,]) \leq 2^{r-1}$.*

Beweis: Sind die x_i so, dass $\sum_{i=1}^{r-1} x_i \leq 1$, liegen alle x_Δ mit $r \notin \Delta$ und x_r in $]\,0, 1\,]$, es ist also $\mu^*(]\,0, 1\,]) = 2^{r-1}$.

Größer kann das Maß eines Intervalls $]\,x-1, x\,]$ aber auch nicht werden. Sei irgendein $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Mit F_x bzw. G_x bezeichnen wir die Menge der nichtleeren $\Delta \subset \{1, \ldots, r-1\}$, für die $x_\Delta \leq x - 1$ bzw. $x_\Delta > x - 1$ gilt. Die Anzahl der Elemente in diesen Mengen nennen wir f_x bzw. g_x. Es ist also $f_x + g_x = 2^{r-1} - 1$. Für $\Delta \in F_x$ bzw $\Delta \in G_x$ liegt x_Δ bzw. $x_\Delta + x_r$ *nicht* in $]\,x-1, x\,]$, als Kandidaten für Elemente aus $]\,x-1, x\,]$ bleiben also höchstens die x_Δ mit $\Delta \in G_x$, die Zahl x_r und die $x_\Delta + x_r$ für $\Delta \in F_x$. Das sind höchstens $g_x + f_x + 1 = 2^{r-1}$ Zahlen. □

Man kann zunächst durch Computerexperimente obere Schranken für γ_r finden. Es ist leicht einzusehen, dass man sich bei der Untersuchung der Intervalle $]\,x-1, x\,]$ auf die $x \in X_{x_1,\ldots,x_r} := \{x_\Delta \mid \emptyset \neq \Delta \subset \{1, \ldots, r\}\}$ beschränken kann. Und dann erzeuge man „viele“ zufällige r-Tupel $x_1, \ldots, x_r$ und bestimme die maximale Anzahl der Elemente aus $X_{x_1,\ldots,x_r}$, die in einem Intervall $]\,x-1, x\,]$ liegen, wobei x alle Elemente aus $X_{x_1,\ldots,x_r}$ durchläuft. So ergaben sich die folgenden Abschätzungen:

r	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\gamma_r \leq$	4	7	13	23	43	83	158	283	566

Wenn die Anzahl der Versuche groß genug ist, sollte γ_r mit der durch Simulation gefundenen Zahl übereinstimmen. Die Werte sind weit größer, als unsere erste

Abschätzung vermuten lässt. So wird sich zum Beispiel wirklich $\gamma_6 = 23$ ergeben, das ist deutlich größer als $2^6/6 = 32/3 = 10.666\ldots$.

Um *untere* Schranken zu finden, werden wir wie folgt vorgehen.

- Wir beobachten: Ist Δ_0 beliebig, so ist γ_r mindestens so groß wie die Anzahl der Δ mit $x_{\Delta_0} - 1 < x_\Delta \leq x_{\Delta_0}$. Das ist offensichtlich.
- Stelle mit Computerhilfe fest, welche Δ_0 „aussichtsreich“ sind, also solche, bei denen voraussichtlich für „viele“ Δ die Zahl x_Δ in $]\, x_{\Delta_0} - 1, x_{\Delta_0}\,]$ liegt. Es zeigt sich: Ist $r = 2\rho+1$ ungerade, so sollte man es mit $\Delta_0 = \{1, 3, \ldots, 2\rho+1\}$ versuchen, und ist $r = 2\rho$ gerade, so arbeite man mit $\Delta_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho\}$.
- Ermittle für solche Δ_0 mit kombinatorischen Methoden die Anzahl der Δ, für die garantiert $x_{\Delta_0} - 1 < x_\Delta \leq x_{\Delta_0}$ gilt.

Für die von uns favoriserten Δ_0 ist also $r \in \Delta_0$, und das bedeutet $x_{\Delta_0} - 1 = x_{\Delta_0'}$, wobei $\Delta_0' := \Delta_0 \setminus \{r\}$. Konsequenterweise werden wir ein Ergebnis benötigen, mit dem sich für beliebige Δ, Δ' feststellen lässt, ob stets $x_\Delta \leq x_{\Delta'}$ gilt.

Wir definieren: Für $\Delta, \Delta' \subset \{1, \ldots, r\}$ werden wir $\Delta < \Delta'$ (bzw.$\Delta \leq \Delta'$) schreiben, wenn bei jeder Wahl der x_i die Ungleichung $x_\Delta < x_{\Delta'}$ (bzw. $x_\Delta \leq x_{\Delta'}$) gilt. So ist etwa offensichtlich $\{1, 2, 5\} \leq \{3, 4, 5\}$ und $\{2, 3, 4, 5\} < \{3, 4, 5, 6, 7\}$, doch es ist nicht richtig, dass $\{1, 4\} \leq \{5\}$, da man aus $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ nicht auf $x_1 + x_4 \leq x_5$ schließen kann.

2.2 Lemma: *Sei $\Delta = \{i_1, \ldots, i_s\}$ und $\Delta' = \{j_1, \ldots, j_t\}$, wo $i_1 < \cdots < i_s$ und $j_1 < \ldots < j_t$.*

(i) Es ist genau dann $\Delta \leq \Delta'$, wenn $s \leq t$ sowie $i_s \leq j_t$, $i_{s-1} \leq j_{t-1}, \ldots,$ $i_1 \leq j_{t-s+1}$.

(ii) $\Delta < \Delta'$ ist gleichwertig zu $\Delta \leq \Delta'$ und $\Delta \neq \Delta'$.

Beweis: (i) Eine Richtung ist offensichtlich. Für die andere gehen wir von $\Delta \leq \Delta'$ aus. Es ist zu zeigen: Wenn die Implikation *nicht* stimmt, ist kann man ein geeignetes (x_i)-Tupel mit $x_\Delta > x_{\Delta'}$ angeben.

Angenommen, es wäre $s > t$. Wir wählen die x_i alle sehr nahe bei 1. Dann ist $x_\Delta \approx s$ und $x_{\Delta'} \approx t$, ein Widerspruch. Dann zeigen wir durch Induktion nach k, dass $i_{s-k} \leq j_{t-k}$. Wir beginnen mit $k = 0$ und nehmen $j_t < i_s$ an. In diesem Fall betrachten wir ein (x_i)-Tupel, bei dem die x_i für $i < i_s$ sehr nahe bei Null und die anderen sehr nahe bei 1 liegen. Dann ist $0 \approx x_{\Delta'} < x_\Delta \approx 1$. Im Induktionsschritt wird ähnlich verfahren.

(ii) Ist $\Delta \leq \Delta'$ und $\Delta \neq \Delta'$ so gibt es in Δ' mehr Summanden, oder es ist ein $i_{s-k} < j_{t-k}$. In jedem Fall ist $x_\Delta < x_{\Delta'}$. Die Umkehrung ist klar. □

Nach diesen Vorbereitungen können untere Abschätzungen für die γ_r gefunden werden. Wir stellen zwei Ansätze dar, für den zweiten ist eine neue Idee erforderlich.

Der erste Ansatz

Setze $\Delta_0 = \{1, 3, \ldots, 2\rho + 1\}$ und $\Delta_0' =: \{1, 3, \ldots 2\rho - 1\}$ für ungerade $r = 2\rho + 1$ bzw. $\Delta_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho\}$ und $\Delta_0' := \{2, 4, \ldots, 2\rho - 2\}$ für gerade $r = 2\rho$.

Unter A_{Δ_0} verstehen wir die Menge der „sicheren Kandidaten“, also die Menge der nichtleeren Δ mit $\Delta_0' < \Delta \leq \Delta_0$. Die Anzahl der Elemente von A_{Δ_0} (wir werden sie $a(\Delta_0)$ nennen) ist eine untere Schranke für γ_r. Für nicht zu große r kann man $a(\Delta_0)$ leicht durch systematische Suche mit Computerhilfe berechnen. Hier ist eine Tabelle der ersten $a(\Delta_0)$ und der sich daraus ergebenden Abschätzungen:

r	Δ_0	$a(\Delta_0)$	Simulation	Schranken für γ_r
4	$\{2,4\}$	7	7	$7 \leq \gamma_r \leq 7$
5	$\{1,3,5\}$	12	13	$12 \leq \gamma_r \leq 13$
6	$\{2,4,6\}$	20	23	$20 \leq \gamma_r \leq 23$
7	$\{1,3,5,7\}$	33	43	$33 \leq \gamma_r \leq 43$
8	$\{2,4,6,8\}$	54	83	$54 \leq \gamma_r \leq 83$
9	$\{1,3,5,7,9\}$	88	158	$88 \leq \gamma_r \leq 158$
10	$\{2,4,6,8,10\}$	143	283	$143 \leq \gamma_r \leq 283$
11	$\{1,3,5,7,9,11\}$	232	566	$232 \leq \gamma_r \leq 566$

Für $a(\Delta_0)$ lässt sich aber auch für beliebige r mit Hilfe von Lemma 2.2 unter Verwendung elementarer Kombinatorik ein expliziter Ausdruck herleiten. Man geht so vor:

1. Sei $\rho \in \{2,3,\ldots\}$.
ϕ_ρ bezeichnet die Anzahl der ganzzahligen ρ-Tupel $a_1,\ldots,a_\rho$, die den Ungleichungen $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\rho$, $a_1 \leq 2$, $2 \leq a_2 \leq 4$,…,$2\rho-2 \leq a_\rho \leq 2\rho$ genügen.
Und unter ψ_ρ verstehen wir die Anzahl der ganzzahligen $(\rho-1)$-Tupel $a_1,\ldots,a_{\rho-1}$, für die die Ungleichungen $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{\rho-1}$, $2 \leq a_1 \leq 4$, $4 \leq a_2 \leq 6$,…,$2\rho-4 \leq a_{\rho-1} \leq 2\rho-2$ gelten.
Zusätzlich setzen wir noch $\phi_1 := 2$ und $\psi_1 := 1$.

2. Für die ϕ_ρ, ψ_ρ gelten die Rekursionsformeln

$$\phi_{\rho+1} = 2\phi_\rho + \psi_\rho, \quad \psi_{\rho+1} = \phi_\rho + \psi_\rho.$$

(Das folgt leicht aus der Definition.)

3. Explizit gilt, mit $\lambda = (3+\sqrt{5})/2$ und $\mu = (3-\sqrt{5})/2$,

$$\phi_\rho = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\lambda^\rho + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\mu^\rho,$$

$$\psi_\rho = \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda^\rho - \frac{\sqrt{5}}{5}\mu^\rho.$$

(Wir wissen, dass stets

$$\begin{pmatrix} \phi_{\rho+1} \\ \psi_{\rho+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\rho \\ \psi_\rho \end{pmatrix}$$

gilt, und die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich als $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ und $\mu = (3 - \sqrt{5})/2$. Die ϕ_ρ, ψ_ρ sind folglich Linearkombinationen der λ^n, μ^n, die Koeffizienten findet man durch Lösen eines Gleichungssystems.)

4. $r = 2\rho$ sei gerade, und $\Delta_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho\}$. Dann ist $a(\Delta_0) = \phi_\rho + \psi_\rho - 1$. Ist $r = 2\rho + 1$ ungerade und $\Delta_0 = \{1, 3, \ldots, 2\rho + 1\}$, so ist $a(\Delta_0) = \phi_{\rho+1} - 1$.
(Hier wird Lemma 2.2 wichtig.)

Für große ρ wachsen die ϕ_ρ, ψ_ρ und damit die $a(\Delta_0)$ asymptotisch wie die Folge $\big((3 + \sqrt{5})/2\big)^\rho$. Es folgt, da $r = 2\rho$ oder $r = 2\rho + 1$, dass γ_r nach unten (bis auf eine Konstante) durch $\big((3 + \sqrt{5})/2\big)^{r/2}$, also durch $\left(\sqrt{(3 + \sqrt{5})/2}\right)^r$ beschränkt ist. Dabei ist interessanter Weise $\sqrt{(3 + \sqrt{5})/2} = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618$ die Zahl des goldenen Schnitts.

Der zweite Ansatz

Sei Δ_0 wie vorstehend. Bisher haben wir uns nur um die $\Delta \in A_{\Delta_0}$ gekümmert, die „sicheren Kandidaten“. Es gibt daneben auch noch die „Versager“, also diejenigen Δ, für die garantiert *nicht* $x_{\Delta_0} - 1 < x_\Delta \leq x_{\Delta_0}$ zu erwarten ist. Offensichtlich ist das die Menge $B_{\Delta_0} := \{\Delta \mid \Delta \leq \Delta_0' \text{ oder } \Delta_0 < \Delta\}$.

Es bleiben die Δ, für die in Abhängigkeit von den konkreten x_k die Ungleichungen $x_{\Delta_0} - 1 < x_\Delta \leq x_{\Delta_0}$ gelten können oder auch nicht. Das ist zum Beispiel für $\{1, 2, 3, 4\}$ im Fall $r = 5$ der Fall: Es ist sicher $x_1 + x_3 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, aber $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq x_1 + x_3 + x_5$ gilt nur dann, falls $x_2 + x_4 \leq x_5$. Diese Δ wollen wir zur Menge C_{Δ_0} zusammenfassen.

Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen ist die folgende Beobachtung, die wir am Fall $r = 5$ beschreiben wollen. Dort besteht C_{Δ_0} aus $\{4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5\}$ und $\{4, 5\}$. Wir betrachten insbesondere $\{4\}, \{4, 5\}$ und behaupten, dass bei beliebigen $x_1, \ldots, x_5$ eine dieser Mengen ein Δ mit $x_{\Delta_0} - 1 < x_\Delta \leq x_{\Delta_0}$ ist. Die Begründung;

– Es ist $\{4\} \leq \{1, 3, 5\}$ und $\{1, 3\} < \{4, 5\}$, in jedem Fall gilt also $x_4 \leq x_{1,3,5}$ und $x_{1,3} < x_{4,5}$.

– Wenn $x_1 + x_3 < x_4$ ist, so ist $x_{1,3} < x_4 \leq x_{1,3,5}$.

– Ist dagegen $x_4 \leq x_1 + x_3$, so folgt $x_{1,3} < x_{4,5} \leq x_{1,3,5}$.

Anders ausgedrückt: Genau eine der Zahlen $x_4, x_{4,5}$ wird zu $]\, x_{\Delta_0} - 1, x_{\Delta_0}\,]$ gehören. Die x_Δ mit den 12 Kandidaten $\Delta \in A_{\Delta_0}$ findet man sowieso, es sind also immer mindestens 13 Elemente. Und das beweist $\gamma_5 = 13$.

Diese Idee soll nun verallgemeinert werden:

2.3 Definition: *Wie bisher seien* $\Delta_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho\}$ *und* $\Delta_0' = \{2, 4, \ldots, 2\rho - 2\}$ *für gerades* $r = 2\rho$ *bzw.* $\Delta_0 = \{1, 3, \ldots, 2\rho + 1\}$ *und* $\Delta_0' = \{1, 3, \ldots, 2\rho - 1\}$ *für ungerades* $r = 2\rho + 1$.

Sei Δ eine nicht leere Teilmenge von $\{1,\ldots,r-1\}$. Die Mengen $\Delta, \Delta\cup\{r\}$ heißen ein Bonuspaar *für r, wenn $\Delta_0' < \Delta\cup\{r\}$ und $\Delta \le \Delta_0$ gilt*[5]*.*

Wir haben gerade gesehen, dass $\{4\},\{4,5\}$ ein Bonuspaar für $r=5$ ist. Es soll gezeigt werden, dass es für „große" r „viele" Bonuspaare gibt und dass das zur Verbesserung der unteren Schranken der γ_r ausgenutzt werden kann. Bonuspaare genügen den Erwartungen:

2.4 Lemma: *Gibt es k Bonuspaare in C_{Δ_0}, so ist $\gamma_r \ge a(\Delta_0)+k$.*

Beweis: Wie in der Motivation zeigt man: Ist $x_{\Delta_0'} < x_\Delta$, so ist $x_\Delta \in \,]\,x_{\Delta_0}-1, x_{\Delta_0}\,]$, und gilt $x_{\Delta\cup\{r\}} \le x_{\Delta_0}$ (gleichwertig: $x_\Delta \le x_{\Delta_0'}$), so ist $x_{\Delta\cup\{r\}}$ ein Element dieses Intervalls. x_Δ und $x_{\Delta\cup\{r\}}$ werden auch nicht beide dazugehören, denn sie haben den Abstand Eins. Da bei k verschiedenen Bonuspaaren $2k$ Elemente aus C_{Δ_0} beteiligt sind, heißt das: k Bonuspaare geben zu genau k zusätzlichen Elementen in $]\,x_{\Delta_0}-1, x_{\Delta_0}\,]$ Anlass[6]. □

Die Bonuspaar-Bedingung kann auch für die $\Delta\in A_{\Delta_0}$ erfüllt sein. Genauer gilt

2.5 Satz: *Wir verwenden die bisherigen Bezeichnungen.*

(i) Sei Δ eine nichtleere Teilmenge von $\{1,\ldots,r-1\}$. Dann gilt $\Delta_0' \le \Delta\cup\{r\}$ und $\Delta\le\Delta_0$ genau dann, wenn Δ oder $\Delta\cup\{r\}$ zu A_{Δ_0} gehört oder $\Delta,\Delta\cup\{r\}$ ein Bonuspaar in C_{Δ_0} ist.

(ii) Die Anzahl der $\Delta\subset\{1,\ldots,r-1\}$ mit $\Delta_0'\le\Delta\cup\{r\}$ und $\Delta\le\Delta_0$ ist gleich $a(A_{\Delta_0})$ plus der Anzahl der Bonuspaare in C_{Δ_0}. Folglich ist die Anzahl dieser Δ eine untere Schranke für γ_r.

Beweis: (i) Δ genüge den Bedingungen $\Delta_0'\le\Delta\cup\{r\}$ und $\Delta\le\Delta_0$.

Fall 1: Es ist auch $\Delta_0'<\Delta$. Dann gilt $\Delta\in A_{\Delta_0}$.

Fall 2: Es ist auch $\Delta\cup\{r\}\le\Delta_0$. In diesem Fall ist $\Delta\cup\{r\}\in A_{\Delta_0}$. (Beachte, dass im Fall $\Delta_0'\le\Delta\cup\{r\}$ sogar $\Delta_0'<\Delta\cup\{r\}$ gilt.)

Fall 3: Es gilt weder Fall 1 noch Fall 2. Wir müssen zeigen, dass Δ und $\Delta\cup\{r\}$ zu C_{Δ_0} gehören, ein Bonuspaar sind sie dann nach Voraussetzung.

Fall 1 liegt *nicht* vor, Δ liegt also nicht in A_{Δ_0}. Es ist auch *nicht* $\Delta\cup\{r\}\le\Delta_0$, also $\Delta\cup\{r\}\notin A_{\Delta_0}$. Wäre $\Delta\in B_{\Delta_0}$, so wäre entweder $\Delta\le\Delta_0'$ oder $\Delta_0<\Delta$. Im ersten Fall folgte $\Delta\cup\{r\}\le\Delta_0$ (Fall 2), der zweite kann nicht eintreten, da $r\notin\Delta$.

Und $\Delta\cup\{r\}\in B_{\Delta_0}$ ist auch nicht möglich. Es müsste dann $\Delta\cup\{r\}\le\Delta_0'$ oder $\Delta_0<\Delta\cup\{r\}$ gelten. Die erste Ungleichung ist wegen $r\notin\Delta_0'$ nicht möglich, die zweite würde $\Delta_0'<\Delta$ (Fall 1) implizieren. Δ und $\Delta\cup\{r\}$ liegen also in C_{Δ_0}.

Für den Beweis der Umkehrung ist nur zu berücksichtigen, dass $\Delta\le\Delta\cup\{r\}$.

(ii) Das folgt sofort aus (i). Es ist nur noch zu beachten, dass niemals Δ und $\Delta\cup\{r\}$ gleichzeitig in A_{Δ_0} liegen können. Δ_0' genügt der Bedingung und muss hier mitgezählt werden, da in Wirklichkeit $\Delta_0'\cup\{r\}=\Delta_0$ gezählt wird. □

Nun wollen wir die Δ zählen, die der Bedingung des vorigen Satzes genügen.

[5] Da r größer ist als das größte Element von Δ_0', darf $\Delta_0'<\Delta\cup\{r\}$ durch $\Delta_0'\le\Delta\cup\{r\}$ ersetzt werden.

[6] Sie müssen nicht verschieden sein, aber jedes derartige x_Δ (oder $x_{\Delta\cup\{r\}}$) erhöht $\mu^*(]\,x_{\Delta_0}-1, x_{\Delta_0}\,])$ um Eins.

Wieder kann das wegen Lemma 2.2 auf ein *kombinatorisches Problem* zurückgeführt werden.

2.6 Definition: *Sei* $\rho \in \{2, 3, \ldots\}$. *Für* $j, j' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *sei* $C^{\rho}_{j,j'}$ *die Anzahl der ganzzahligen* ρ*-Tupel* $a_1 < a_2 < \cdots < a_\rho$, *die den Bedingungen* $a_1 = 2 + j$, $4 \le a_2 \le 8$, $6 \le a_3 \le 10$,...,$2\rho - 2 \le a_{\rho-1} \le 2\rho + 2$, $a_\rho = 2\rho + j'$ *genügen.*

Die Gesamtheit der $C^{\rho}_{j,j'}$ *definiert eine* 5×5*-Matrix* $C_\rho := (C^{\rho}_{j,j'})_{j,j'=0,1,2,3,4}$

So ist zum Beispiel $C^3_{2,4} = 4$, denn die fraglichen Tupel sind $(4, 5, 10)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 10)$ und $(4, 8, 10)$. Und C_2 ist gleich

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel steht unten links deswegen eine Null, weil es keine Tupel $a_1 < a_2$ mit $a_1 = 6$ und $a_2 = 4$ gibt.

2.7 Lemma: *Für* $\rho \ge 2$ *ist* $C_{\rho+1} = CC_\rho$. *Es folgt* $C_\rho = C^{\rho-1}$.

Beweis: Wie wird zum Beispiel $C^{\rho+1}_{j,0}$ berechnet? Wir schauen uns in den fraglichen $(\rho + 1)$ Ungleichungen insbesondere a_ρ an. Für $a_\rho = 2\rho$ und $a_\rho = 2\rho + 1$ liefert das einen Kandidaten für $C^{\rho+1}_{j,0}$, denn dann ist $a_\rho < a_{\rho+1} = 2\rho + 2$. Ist dagegen $a_\rho = 2\rho + j'$ mit einem $j' > 1$, so liefert das keinen Beitrag. Das bedeutet: $C^{\rho+1}_{j,0} = C^{\rho}_{j,0} + C^{\rho}_{j,1}$. Bei der Berechnung von $C^{\rho+1}_{j,4}$ werden dagegen alle $C^{\rho}_{j,j'}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ berücksichtigt. Das kann nach entsprechenden Überlegungen für die anderen Einträge in der Matrixgleichung $C_{\rho+1} = CC_\rho$ zusammengefasst werden. □

Das Ergebnis soll nun zum Zählen der in Satz 2.5 (i) auftretenden Δ verwendet werden. Wir beginnen mit der Diskussion des Falls, dass $r = 2\rho$ gerade ist. Wie üblich setzen wir $\Delta_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho\}$ und $\Delta'_0 = \{2, 4, \ldots, 2\rho-2\}$. Uns interessieren doch die Δ, die r nicht enthalten, und für die $\Delta'_0 \le \Delta \cup \{r\}$ und $\Delta \le \Delta_0$ gilt Wegen Lemma 2.2. kann Δ nur aus $\rho - 2$, $\rho - 1$ oder aus ρ Elementen bestehen.

1. Die Δ *mit Länge* $\rho - 2$. Sei $\Delta = \{a_1, \ldots, a_{\rho-2}\}$ mit $0 < a_1 < \cdots < a_{\rho-2} < 2\rho$ (Es muss $a_{\rho-2} < 2\rho$ sein, denn Δ soll r nicht enthalten). Die Bedingungen $\Delta'_0 \le \Delta \cup \{r\}$, $\Delta \le \Delta_0$ implizieren wegen Lemma 2.3

$$2 \le a_1 \le 6,\ 4 \le a_2 \le 8,\ \ldots, 2(\rho - 2) \le a_{\rho-2} \le 2(\rho - 1) + 1.$$

Wenn die letzte Bedingung $a_{\rho-2} \le 2(\rho-1)+2$ wäre, würden *alle* Tupel, die bei der Berechnung aller $C^{\rho-2}_{j,j'}$ auftreten, gefragt sein. Die Anzahl wäre also $\sum_{j,j'} C^{\rho-2}_{j,j'}$. Wegen $a_{\rho-2} < r$ darf $j' = 4$ nicht berücksichtigt werden. Die Anzahl der fraglichen Tupel ist also $\sum_{j=0,1,2,3,4,j'=0,1,2,3} C^{\rho-2}_{j,j'}$. Wir setzen noch $D^{\rho-2}_j := \sum_{j'=0,1,2,3} C^{\rho-2}_{j,j'}$, dann ist die gesuchte Anzahl $\sum_{j=0}^4 D^{\rho-2}_j$.

2. Die Δ *mit Länge* $\rho - 1$. Diesmal geht es um $(\rho - 1)$-Tupel $0 < a_1 < \cdots < a_{\rho-1} < 2\rho$ mit

$$a_1 \le 4,\ 2 \le a_2 \le 6,\ 4 \le a_3 \le 8,\ \ldots, 2(\rho - 2) \le a_{\rho-1} \le 2(\rho - 1) + 1.$$

Wie viele solche Tupel gibt es, wenn $a_2 = 2 + j$ für ein $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist? Das hängt von j ab. Ist etwa $j = 0$, so gibt es für a_1 nur eine einzige Möglichkeit, d.h., es gibt $D_0^{\rho-2}$ Möglichkeiten. In den Fällen $j = 1, 2, 3, 4$ kann a_1 mehr Werte annehmen: 2 für $j = 1$, 3 für $j = 2$, 4 für $j = 3$ und $j = 4$. So folgt: Es gibt

$$D_0^{\rho-2} + 2 \cdot D_1^{\rho-2} + 3 \cdot D_2^{\rho-2} + 4 \cdot D_3^{\rho-2} + 4 \cdot D_4^{\rho-2}$$

geeignete Tupel.

3. Die Δ mit Länge ρ. Das läuft auf die Suche nach den $0 < a_1 < \cdots < a_\rho < r$ mit

$$a_1 \leq 2, a_2 \leq 4,\ 2 \leq a_3 \leq 6,\ 4 \leq a_4 \leq 8,\ \ldots, 2(\rho - 2) \leq a_\rho \leq 2(\rho - 1) + 1$$

hinaus. Ist $a_3 = 2 + j$, so kennen wir die Anzahl der $(a_3, \ldots, a_\rho)$ mit den richtigen Eigenschaften schon: Sie ist gleich $D_j^{\rho-2}$. Es hängt aber von j ab, wie viele a_1, a_2 möglich sind:

– Ist $j = 0$, also $a_3 = 2$, so gibt es keine a_1, a_2 mit $0 < a_1 < a_2 < a_3$ und $a_1 \leq 2, a_2 \leq 4$.
– Eine einzige Wahl a_1, a_2 (nämlich $(1, 2)$) gibt es im Fall $j = 1$.
– Drei Möglichkeiten (nämlich $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$) sind im Fall $j = 2$ erlaubt.
– Fünf Möglichkeiten (nämlich $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$ für $j = 3$.
– Ebenfalls fünf Möglichkeiten (die gleichen wie eben) im Fall $j = 4$.

Zusammen heißt das: Geeignete ρ-Tupel gibt es genau

$$0 \cdot D_0^{\rho-2} + 1 \cdot D_1^{\rho-2} + 3 \cdot D_2^{\rho-2} + 5 \cdot D_3^{\rho-2} + 5 \cdot D_4^{\rho-2}.$$

Um zur Anzahl der Δ in Satz 2.5 (i) zu kommen, muss man die Ergebnisse für $\rho - 2, \rho - 1, \rho$ nur addieren:

$$(1{+}1{+}0)D_0^{\rho-2} + (1{+}2{+}1)D_1^{\rho-2} + (1{+}3{+}3)D_2^{\rho-2} + (1{+}4{+}5)D_3^{\rho-2} + (1{+}4{+}5) \cdot D_4^{\rho-2}.$$

So gelangen wir zu

2.8 Satz: *Ist $r = 2\rho$ gerade, so gilt*

$$\gamma_r \geq (2, 4, 6, 10, 10) C_{\rho-2} (1, 1, 1, 1, 0)^\top.$$

(Der Ausdruck in der Formel ist das Produkt der Matrizen $(2, 4, 6, 10, 10)$, $C_{\rho-2} = C^{\rho-1}$ und $(1, 1, 1, 1, 0)^\top$.)

Hier folgen einige konkrete Werte:

ρ	4	5	6	7	8	9	10	11
r	8	10	12	14	16	18	20	22
$\gamma_r \geq$	75	244	793	2 576	8 366	27 167	88 215	286 439

Es fehlt noch die Diskussion des Falles ungerader $r = 2\rho + 1$. Diesmal ist $\Delta_0 = \{1, 3, \ldots, 2\rho + 1\}$ und $\Delta_0' = \{1, 3, \ldots, 2\rho - 1\}$. Uns interessiert die Anzahl der Δ mit $r \notin \Delta$ und $\Delta_0' \leq \Delta \cup \{r\}$ sowie $\Delta \leq \Delta_0$. Wegen Lemma 2.2 sind nur Δ mit $\rho - 1, \rho, \rho + 1$ Elementen möglich, und wir werden wieder auf kombinatorische Probleme geführt. Ähnlich wie im Fall gerader r zeigt man:

– *Die Δ mit Länge $\rho - 1$.:* Davon gibt es $\sum_{j=0}^{4} D_j^{\rho-1}$.

– *Die Δ mit Länge ρ:* Die Anzahl ist

$$0 \cdot D_0^{\rho-1} + 1 \cdot D_1^{\rho-1} + 2 \cdot D_2^{\rho-1} + 3 \cdot D_3^{\rho-1} + 3 \cdot D_4^{\rho-1}.$$

– *Die Δ mit Länge $\rho + 1$:* Hier erhält man als Anzahl

$$0 \cdot D_0^{\rho-1} + 0 \cdot D_1^{\rho-1} + 1 \cdot D_2^{\rho-1} + 2 \cdot D_3^{\rho-1} + 2 \cdot D_4^{\rho-1}.$$

Fasst man die drei Fälle zusammen, so folgt für die Gesamtzahl

$$(1{+}0{+}0)D_0^{\rho-1} + (1{+}1{+}0)D_1^{\rho-1} + (1{+}2{+}1)D_2^{\rho-1} + (1{+}3{+}2)D_3^{\rho-1} + (1{+}3{+}2)D_4^{\rho-1},$$

und unter Verwendung der C_ρ kann das als Matrixprodukt umgeschrieben und zu einer Abschätzung ausgenutzt werden:

2.9 Satz: *Ist $r = 2\rho + 1$ ungerade, so gilt*

$$\gamma_r \geq (1, 2, 4, 6, 6) C_{\rho-1} (1, 1, 1, 1, 0)^\top.$$

Konkret ergibt das die folgenden Abschätzungen:

ρ	3	4	5	6	7	8	9	10
r	7	9	11	13	15	17	19	21
$\gamma_r \geq$	42	136	441	1 431	4 645	15 080	48 961	158 970

Wie gut sind die bisherigen Abschätzungen? Es ist zu erwarten, dass γ_r durch die approximativ ermittelten Werte gut zu approximieren ist. Bisher haben wir γ_r für $r \leq 6$ exakt identifiziert, bei γ_7 sind wir sehr nahe am Zielwert, doch dann wird die Lücke zwischen dem erwarteten γ_r und der beweisbaren Schranke immer größer.

Ganz am Anfang hatten wir schon bemerkt, dass $\gamma_r \geq (2^r - 1)/r$. Die hier ermittelten Schranken erweisen sich für $r \leq 31$ als besser, für große r sind unsere Untersuchungen also nicht besonders hilfreich. Es ist auch leicht festzustellen woran das liegt. Für das asymptotische Verhalten der von uns ermittelten Ausdrücke spielen doch die Potenzen der Matrix C eine Rolle. Die Eigenwerte dieser Matrix sind (MAPLE sei Dank) $0, 0, 0.1981, 1.5549, 3.2470,$. Es ist $r = 2\rho$ oder $r = 2\rho + 1$, das Wachstum wird also asymptotisch wie $(\sqrt{3.2470})^r = 1.802^r$ sein. Oder anders formuliert: Durch den zweiten Ansatz wurde die untere Schranke auf $c \cdot 1.802^r$ gegenüber $c \cdot 1.618$ aus dem ersten Ansatz verbessert. Es sollte aber angesichts der Lücke zwischen Experiment und strenger Abschätzung noch viel besser gehen.

3. Untere Schranken für Summen-separierte n-Tupel

Durch Umskalieren können die Ergebnisse des vorigen Abschnitts für untere Abschätzungen von $f(n)$ nutzbar gemacht werden. Nach Definition von γ_r gilt doch: Ist $0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$, so gibt es ein x, für das die Anzahl der x_Δ in $]\,x-1, x\,]$ mindestens gleich γ_r ist. Und für γ_r gibt es einige konkrete Abschätzungen.

Unmittelbar folgt: Sind $0 < x_1 < \cdots < x_r := y$ reelle Zahlen, so gibt es ein x, für das die Anzahl der x_Δ in $]\,x-y, x\,]$ mindestens gleich γ_r ist.

Und nun sei eine Summen-separierende Familie $0 < a_1 < \cdots < a_n$ vorgelegt. Wir wählen ein x wie vorstehend: γ_n Zahlen a_Δ liegen in $]\,x-a_n, x\,]$. Die a_Δ sind aber nach Voraussetzung verschiedene natürliche Zahlen, es ist also $a_n \geq \gamma_n$. Wir folgern:

3.1 Satz: *Es ist $\gamma_n \leq f(n)$ für alle n.*

Bis $n = 8$ ist $f(n)$ exakt bekannt. Für größere n lässt sich aufgrund unserer Ergebnisse folgendes aussagen:

$$136 \leq f(9) \leq 161$$

$$244 \leq f(10) \leq 309$$

$$441 \leq f(11) \leq 594$$

$$793 \leq f(12) \leq 1159$$

$$1431 \leq f(13) \leq 2262$$

$$2576 \leq f(14) \leq 4475.$$

Das vergleiche man mit der bekannten Abschätzung $f(n) \geq 2^n/(4\sqrt{n})$:

n	9	10	11	12	13	14
$f(n) \geq$	42.66	80.95	154.37	295.60	568.01	1094.70

4. Zusammenfassung

Die Atkinson-Negro-Santoro-Konstruktion ([2]) und die Guy-Conway-Konstruktion ([4], [7]) erweisen sich als Spezialfälle einer neuen systematischen Konstruktion schwach Summen-separierter n-Tupel. Dadurch konnten die oberen Schranken für optimale Summen-separierte Familien leicht verbessert werden. Das Auffinden neuer unterer Schranken wurde auf ein Maß-Konzentrations-Ergebnis zurückgeführt.

Der Autor dankt Herrn Noga Alon, durch den er auf die Ergebnisse in [1] und [3] aufmerksam gemacht wurde.

Literatur

[1] N. Alon - J. Spencer. *The Probabilistic Method*. Wiley and Sons, 2016.

[2] M. D. Atkinson - A. Negro - N. Santoro. *Integer Sets with Lexicographically Ordered Subset Sums*. Technical Report 100, Carlton Univ., 1986.

[3] T. Bohmann. *A construction for sets of integers with distinct subset sums*. Electron. J. Combin. 5 (1998), Research Paper 3, 14 pp.

[4] J.H. Conway - R.K- Guy. *Sets of Natural Numbers with Distinct Sums*. Notices of the AMS 15, 1968, 345.

[5] P. Erdös. *Problems and results from additive number theory*. Colloq. Théorie des Nombres, Bruxelles, 1955.

[6] R. K. Guy. *Sets of integers whose subsets have distinct sums*. Annals of Discrete Mathematics 12, 1982, 141 - 154.

[7] W. F. Lunnon. *Integer Sets with distinct Subset Sums*. Mathematics of Computation 50 (1988), 297 –320.

Ehrhard Behrends
Mathematisches Institut, Freie Universität Berlin
Arnimallee 6
D-14 195 Berlin
Germany
e-mail: behrends@math.fu-berlin.de