9. Übung: Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mo, 20.6.05

(1) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbf{R}^4$ sind linear unabhängig, welche sind linear abhängig?

(a) $A := \{(1,1,1,4),(2,7,1,3),(0,5,2,1)\}$.

(b) $B := \{(4,0,2,3),(1,1,1,1),(2,1,0,3)\}$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von $\langle A \rangle$ und von $\langle B \rangle$.

(d) Geben Sie fünf Vektoren des $\mathbf{R}^4$ an von denen je vier linear unabhängig sind.

(2) Sei M eine Teilmenge eines K-Vektorraums V. Zeige, M ist genau dann linear abhängig, wenn es eine echte Teilmenge N von M gibt, mit

$$\langle M \rangle = \langle N \rangle.$$

(3) Sei V der $\mathbf{R}$-Vektorraum $\mathbf{R}^4$ und sei $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die kanonische Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass $M := \{(1,1,1,3),(2,4,5,0)\}$ linear unabhängig ist.

(b) Setzen Sie wie in dem Steinitz'schen Austauschsatz M mit Vektoren aus B zu einer Basis von V fort.

(4) Sei V der $\mathbf{R}$-Vektorraum der Menge der $(m \times n)$–Matrizen $M_{m,n}$ mit Einträgen aus $\mathbf{R}$. Für $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq l \leq n$ sei

$$E_{k,l} := (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m}$$

die Matrix mit $a_{i,j} = 0$ für $(i,j) \neq (k,l)$ und $a_{i,j} = 1$ für $(i,j) = (k,l)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B := \{E_{k,l} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n\}$$

eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von V.