7. Übung: Lineare Algebra I

Sommersemester 2005

Barbara Baumeister, Abgabe: Mo, 6.6.05

(1) Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Weiter sei e das neutrale Element in G. Beweisen Sie:

(a) $Kernf$ ist ein Normalteiler in G.

(b) Es gilt:
$Kernf = \{e\}$ genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.

(2) Sei p eine Primzahl und $r \in \mathbf{Z}$ so dass p nicht r teilt.

(a) (Euklidischer Algorithmus) Setze $r = x_0$ und $p = x_1$. Betrachte den folgenden Algorithmus: Setze

$$x_{i-1} = \lambda_i x_i + x_{i+1}, \text{ mit } |x_{i+1}| < |x_i|,$$

falls $x_i \neq 0$ ist, $i \geq 1$ und $\lambda_i \in \mathbf{Z}$. (Division von x_{i-1} durch x_i mit Rest.) Der Algorithmus endet, falls $x_j = 0$ ist. Zeigen Sie, dass dann $|x_{j-1}| = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbf{Z}$ gibt, so dass

$$ap + br = 1.$$

(Benutzen Sie (a).)

(c) Sei $\overline{x} \in \mathbf{Z}_p$ mit $\overline{x} \neq \overline{0}$. Zeigen Sie, dass es ein $\overline{y} \in \mathbf{Z}_p$ gibt, für das $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{1}$ ist. (Benutzen Sie (b).)

(3) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass K nullteilerfrei ist.

(4) Es ist $\mathbf{R}^n$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Teilmenge von $\mathbf{R}^n$ sind Unterräume?

(a) $U_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i = a, 1 \leq i \leq n, a \in \mathbf{R}\}$.

(b) $U_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$.

(c) $U_3 = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = a_n\}$, $n \geq 2$.